

# Προσδιορισμός της απόκλισης της κατακορύφου με βελτιωμένες τιμές των στοιχείων του πίνακα Εϋνός του κανονικού πεδίου βαρύτητας

Γ. Μανουσάκης, Ρ. Κορακίτης

Κέντρο Δορυφόρων Διονύσου, Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.,  
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφος, Τ.Κ. 157 80  
gmanous@survey.ntua.gr

**Περίληψη:** Η σημασία του πίνακα του Εϋνός σε διάφορες γεωδαιτικές εφαρμογές πάνω στην φυσική γήινη επιφάνεια είναι σημαντική. Τα στοιχεία του πίνακα Εϋνός προσδιορίζονται από μετρήσεις με ζυγό στρέψεως. Στην εργασία περιγράφεται η μέθοδος προσδιορισμού των αποκλίσεων της κατακορύφου με μετρήσεις του ζυγού στρέψεως και ταυτόχρονα παρουσιάζεται και μια μεθοδολογία για την βελτίωση των σχέσεων της μεθόδου.

## 1 Εισαγωγή

Ο πίνακας Εϋνός ή πίνακας του Marussi (συναντάται και ως τανυστής Εϋνός ή τανυστής του Marussi) είναι η δεύτερη παράγωγος του γήινου βαρυτικού δυναμικού σε ένα σημείο  $P$  πάνω ή έξω από την επιφάνεια της γης. Το γήινο βαρυτικό δυναμικό υποτίθεται ότι είναι εκφρασμένο σε ένα τοπικό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$  με κέντρο το σημείο  $P$ , ο άξονας  $z$  είναι κάθετος στην ισοδυναμική επιφάνεια που περνά από το σημείο  $P$  με φορά στο εξωτερικό της ισοδυναμικής επιφάνειας, ο άξονας  $y$  είναι εφαπτόμενος της ισοδυναμικής επιφάνειας στο σημείο  $P$  με φορά το Βορρά και ο άξονας  $x$  είναι εφαπτόμενος της ισοδυναμικής επιφάνειας με φορά προς την ανατολή. Εάν συμβολίσουμε με  $W$  το γήινο βαρυτικό δυναμικό τότε η δεύτερη παράγωγος του γήινου βαρυτικού δυναμικού στο σημείο  $P$  στις τοπικές Καρτεσιανές συντεταγμένες ή αλλιώς ο πίνακας του Εϋνός στο σημείο  $P$  ισούται με

$$E(P) = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}_P \quad (1.1)$$

Τα στοιχεία του πίνακα του Εϋνός σε ένα σημείο της φυσικής γήινης επιφάνειας προσδιορίζονται από μετρήσεις με ζυγό στρέψης (torsion balance measurements) στο σημείο αυτό. Το μόνο στοιχείο το οποίο δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τις μετρήσεις αυτές είναι το  $W_{zz}$  δηλαδή η κατευθυνόμενη παράγωγος του μέτρου της

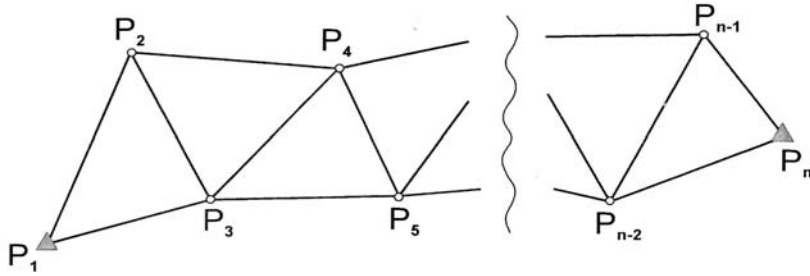
πραγματικής βαρύτητας κατά την διεύθυνση του φορέα του διανύσματος της πραγματικής βαρύτητας (vertical gradient of gravity).

Η χρησιμότητα του πίνακα Εϋτνός, εκτός από την Βαθμιδομετρία, έγκειται και σε διάφορες εφαρμογές πάνω στην φυσική γήινη επιφάνεια. Ο πίνακας Εϋτνός είναι το «κέντρο» του ενδιαφέροντος για το περίφημο «Πρόβλημα Ιδιομορφίας» ή “Singularity Problem”. Δηλαδή ο μηδενισμός της ορίζουσας του πίνακα Εϋτνός χαρακτηρίζει ένα σημείο του – εξωτερικού – πεδίου βαρύτητας της γης ως ιδιόμορφο (singular). Η συνέπεια είναι ότι στο σημείο αυτό δεν είναι δυνατή η αντικατάσταση (ψεύδο)διαφορικών ανολονομικών συντεταγμένων που σχετίζονται με ένα κινούμενο τοπικό αστρονομικό σύστημα με διαφορικά ολονομικών συντεταγμένων (Livieratos, 1976). Μια άλλη εφαρμογή του πίνακα Εϋτνός είναι ο προσδιορισμός των αποκλίσεων της κατακορύφου μεταξύ σημείων της φυσικής γήινης επιφάνειας στα οποία γνωρίζουμε τις αποκλίσεις αυτές. Η γνώση των αποκλίσεων της κατακορύφου είναι απαραίτητη για το προσδιορισμό του γεωειδούς (Völgyesi, 1993). Τα στοιχεία του πίνακα Εϋτνός τα οποία περιλαμβάνονται στους τύπους των υπολογισμών είναι τα  $W_{xx}$  και  $W_{yy}$ . Μια δεύτερη εφαρμογή είναι ο προσδιορισμός της απόκλισης του γεωειδούς εφαρμόζοντας μια εναλλακτική λύση για την αστρονομική χωροστάθμιση (Völgyesi, 2001). Τέλος αναφέρουμε και τον προσδιορισμό ανωμαλιών βαρύτητας  $\rho\chi$  για τον βαρυτομετρικό προσδιορισμό του γεωειδούς. Τα στοιχεία του πίνακα Εϋτνός που περιλαμβάνονται στις σχέσεις των υπολογισμών είναι τα  $W_{xz}$  και  $W_{yz}$ . Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό των αποκλίσεων της κατακορύφου με μετρήσεις ζυγού στρέψεως. Ο προσδιορισμός των αποκλίσεων της κατακορύφου, εκτός από τα στοιχεία  $W_{xx}$  και  $W_{yy}$  του πραγματικού βαρυτικού δυναμικού, περιλαμβάνει και τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα Εϋτνός για το κανονικό βαρυτικό δυναμικό  $U$ . Οι τιμές των στοιχείων  $U_{xx}$  και  $U_{yy}$  που χρησιμοποιούνται στις σχέσεις υπολογισμών είναι πάνω σε ένα επιλεγμένο ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Εδώ θα προτείνουμε μία μέθοδο για να προσδιορίζονται αυτές οι τιμές πάνω στο σημείο υπολογισμού στην φυσική γήινη επιφάνεια.

## 2 Προσδιορισμός στοιχείων απόκλισης της κατακορύφου με μετρήσεις ζυγού στρέψης.

Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}, P_n$  πάνω στην φυσική γήινη επιφάνεια τα οποία σχηματίζουν ένα σύνολο τριγώνων με κοινές πλευρές (καλύπτοντας μια σχετικώς μικρή περιοχή) όπως στο παρακάτω σχήμα

Έστω ότι τα στοιχεία της απόκλισης της κατακορύφου (αναφερόμαστε σε απόκλιση κατακορύφου κατά Helmert) συμβολίζονται ως  $\zeta$  και  $\eta$ . Στα παραπάνω σημεία υποθέτουμε ότι έχουν γίνει μετρήσεις με ζυγό στρέψης οπότε είναι γνωστά τα στοιχεία του πίνακα Εϋτνός. Επί πλέον υποθέτουμε ότι στο πρώτο και τελευταίο



Σχήμα 1

σημείο (δηλαδή στα σημεία  $P_1$  και  $P_n$ ) είναι γνωστές οι τιμές των μεγεθών της απόκλισης της κατακορύφου. Για το τρίγωνο  $P_1P_2P_3$  έχουμε δύο εξισώσεις (Völgyesi, 1993) που αφορούν στις μετρήσεις του ζυγού στρέψης:

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{21}\eta\mu\alpha_{12} - \Delta\eta_{21}\sigma\nu\alpha_{12} = \frac{S_{12}}{4g} [(W_{yy} - W_{xx} - U_{yy} + U_{xx})(P_1)\eta\mu 2\alpha_{12} + \\ + (W_{yy} - W_{xx} - U_{yy} + U_{xx})(P_2)\eta\mu 2\alpha_{12} + \\ + (W_{xy} - U_{xy})(P_1)\sigma\nu 2\alpha_{12} + (W_{xy} - U_{xy})(P_2)\sigma\nu 2\alpha_{12}] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{32}\eta\mu\alpha_{23} - \Delta\eta_{32}\sigma\nu\alpha_{23} = \frac{S_{23}}{4g} [(W_{yy} - W_{xx} - U_{yy} + U_{xx})(P_2)\eta\mu 2\alpha_{23} + \\ + (W_{yy} - W_{xx} - U_{yy} + U_{xx})(P_3)\eta\mu 2\alpha_{23} + \\ + (W_{xy} - U_{xy})(P_2)\sigma\nu 2\alpha_{23} + (W_{xy} - U_{xy})(P_3)\sigma\nu 2\alpha_{23}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{31}\eta\mu\alpha_{13} - \Delta\eta_{31}\sigma\nu\alpha_{13} = \frac{S_{13}}{4g} [(W_{yy} - W_{xx} - U_{yy} + U_{xx})(P_1)\eta\mu 2\alpha_{13} + \\ + (W_{yy} - W_{xx} - U_{yy} + U_{xx})(P_3)\eta\mu 2\alpha_{13} + \\ + (W_{xy} - U_{xy})(P_1)\sigma\nu 2\alpha_{13} + (W_{xy} - U_{xy})(P_3)\sigma\nu 2\alpha_{13}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

όπου

$$\Delta\xi_{21} = \xi_1 - \xi_2 \quad (2.4)$$

$$\Delta\eta_{21} = \eta_1 - \eta_2 \quad (2.5)$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τα μεγέθη  $\Delta\xi_{32}$ ,  $\Delta\xi_{31}$ ,  $\Delta\eta_{32}$  και  $\Delta\eta_{31}$  αντίστοιχα. Επί πλέον  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{23}$  και  $\alpha_{13}$  είναι τα αζιμούθια των πλευρών  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$  και  $P_1P_3$  αντίστοιχα,  $S_{12}$ ,  $S_{23}$  και  $S_{13}$  οι αποστάσεις των πλευρών  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$  και  $P_1P_3$  αντίστοιχα και  $g$  μια μέση τιμή βαρύτητας για την περιοχή που βρίσκονται όλα τα σημεία μελέτης. Το τοπικό σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y, z)$  ορίζεται στο σημείο  $P_1$ . Επειδή η περιοχή μελέτης επιλέγεται να έχει «μικρή» έκταση υποθέτουμε ότι όλα τα τοπικά Καρτεσιανά συστήματα που ορίζονται στα υπόλοιπα σημεία προκύπτουν από παράλληλη μετατόπιση του αρχικού. Βοηθητικές σχέσεις είναι οι

$$\Delta\xi_{21} + \Delta\xi_{32} + \Delta\xi_{13} = 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta\eta_{21} + \Delta\eta_{32} + \Delta\eta_{13} = 0 \quad (2.7)$$

Οι άγνωστοι για το τρίγωνο  $P_1P_2P_3$  είναι οι  $\Delta\xi_{21}$ ,  $\Delta\xi_{32}$ ,  $\Delta\xi_{13}$  και  $\Delta\eta_{21}$ ,  $\Delta\eta_{32}$ , και  $\Delta\eta_{13}$  (σύνολο έξι) ενώ οι εξισώσεις είναι πέντε. Άρα για τα  $n-2$  το πλήθος τρίγωνα στην περιοχή μελέτης έχουμε σύνολο  $4n-6$  αγνώστους και  $4n-7$  πλήθος εξισώσεις. Η τελευταία εξίσωση για να βρεθούν οι άγνωστοι είναι η

$$\sum_{i=2}^n \Delta\xi_{i=1,i} = \xi_n - \xi_1 \quad (2.8)$$

ή

$$\sum_{i=2}^n \Delta\eta_{i=1,i} = \eta_n - \eta_1 \quad (2.9)$$

### 3 Μεθοδολογία

Οι τιμές των δευτέρων παραγώγων του κανονικού δυναμικού που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις (2.1), (2.2) και (2.3) είναι προσεγγιστικές. Δηλαδή οι τιμές τους προσδιορίζονται στις προβολές των σημείων της φυσικής γήινης επιφάνειας πάνω στο ελλειψοειδές (η προβολή γίνεται κατά μήκος της καθέτου στο ελλειψοειδές), ταυτίζοντας το αντίστοιχο τοπικό Καρτεσιανό σύστημα  $(x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i})$  που ορίζεται στην προβολή  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  του κάθε σημείου της φυσικής γήινης επιφάνειας  $P_1, P_2, \dots, P_n$  στο ελλειψοειδές με το τοπικό Καρτεσιανό  $(x, y, z)$  στο οποίο αναφέρονται οι μετρήσεις του ζυγού στρέψης. Είναι (Toth et al, 2001)

$$U_{yy} - U_{xx} = \gamma \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) = \gamma(k_2 - k_1) = 10,26\sigma\nu^2\phi \quad (3.1)$$

σε μονάδες μετρήσεως Εδτνός (συμβολίζεται και με  $E$ ,  $1E\delta\tau\acute{n}\acute{o}s = 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$ ). Όμως αυτά τα δύο Καρτεσιανά συστήματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Όπως προαναφέραμε το τοπικό Καρτεσιανό σύστημα  $(x, y, z)$  χρησιμοποιείται για όλη την περιοχή μελέτης. Επί πλέον υποθέτοντας την παραλληλία των τοπικών συστημάτων  $(x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i})$  μεταξύ τους έπεται ότι  $U_{xy} = 0$  για κάθε σημείο  $Q_i$ . Στα σημεία  $P_1, P_2, \dots, P_n$  της φυσικής γήινης επιφάνειας ορίζουμε αντίστοιχα τα παρακάτω τοπικά Καρτεσιανά συστήματα με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{bmatrix} x_{1i} \\ y_{1i} \\ z_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -h_{P_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\nu\delta_i & \eta\mu\delta_i \\ 0 & -\eta\mu\delta_i & \sigma\nu\delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{Q_i} \\ y_{Q_i} \\ z_{Q_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

και  $h_{P_i}$  το γεωμετρικό υψόμετρο του σημείου  $P_i$ . Υποθέτουμε ότι τα συστήματα

$(x_{1i}, y_{1i}, z_{1i})$  παράλληλα μετατοπισμένα ως προς το  $(x, y, z)$ . Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} x_{Q_i} \\ y_{Q_i} \\ z_{Q_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\nu\delta_i & -\eta\mu\delta_i \\ 0 & \eta\mu\delta_i & \sigma\nu\delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ y_{1i} \\ z_{1i} + h_{P_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial x_{1i}} & \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial y_{1i}} & \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial z_{1i}} \\ \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial x_{1i}} & \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial y_{1i}} & \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial z_{1i}} \\ \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial x_{1i}} & \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial y_{1i}} & \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial z_{1i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\nu\delta_i & -\eta\mu\delta_i \\ 0 & \eta\mu\delta_i & \sigma\nu\delta_i \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

και (Hofmann – Wellenhoff, Moritz, 2006)

$$\delta_i = h_{P_i} \frac{f^*}{R} \eta\mu 2\phi_i \quad (3.5)$$

με  $f^* = 0,005112$ . Είναι

$$U_{x_{1i}x_{1i}} = U_{x_{Q_i}x_{Q_i}} \quad (3.6)$$

$$U_{y_{1i}y_{1i}} = U_{y_{Q_i}y_{Q_i}} \sigma\nu\delta_i^2 + U_{y_{Q_i}z_{Q_i}} \eta\mu 2\delta_i + U_{z_{Q_i}z_{Q_i}} \eta\mu^2 \delta_i \quad (3.7)$$

Είναι

$$U_{x_{1i}x_{1i}}(P_i) = U_{xx}(P_i) = U_{x_{Q_i}x_{Q_i}}(Q_i) + U_{x_{Q_i}x_{Q_i}z_{Q_i}}(Q_i)h_{P_i} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} U_{y_{1i}y_{1i}}(P_i) = U_{yy}(P_i) = & [U_{y_{Q_i}y_{Q_i}}(Q_i) + U_{y_{Q_i}y_{Q_i}z_{Q_i}}(Q_i)h_{P_i}] \sigma\nu\delta_i^2 + \\ & + [U_{y_{Q_i}z_{Q_i}}(Q_i) + U_{y_{Q_i}z_{Q_i}z_{Q_i}}(Q_i)h_{P_i}] \eta\mu 2\delta_i + \\ & + [U_{z_{Q_i}z_{Q_i}}(Q_i) + U_{z_{Q_i}z_{Q_i}z_{Q_i}}(Q_i)h_{P_i}] \eta\mu^2 \delta_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

όπου (Manoussakis, 2013)

$$U_{x_{Q_i}x_{Q_i}z_{Q_i}} = \gamma\kappa_1^2 \quad (3.10)$$

$$U_{y_{Q_i}y_{Q_i}z_{Q_i}} = \gamma k_2^2 - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_{Q_i}^2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_{Q_i}} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{k_1} \left( \frac{b^2}{2a^2} - \frac{1}{2} \right) \eta \mu 2\phi + \frac{1}{k_1} \left( \frac{b^2}{a^2} \sigma \nu v^2 \phi + \eta \mu^2 \phi \right)} \right)} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y_{Q_i}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y_{Q_i}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial y_{Q_i}}} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_{Q_i}^2} = \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \phi^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_{Q_i}} \frac{\partial^2 y_{Q_i}}{\partial \phi^2} \right) \frac{1}{\left( \frac{\partial^2 y_{Q_i}}{\partial \phi^2} \right)^2} \quad (3.14)$$

Θα προσδιορίσουμε τις διορθώσεις που θα εισάγουμε με τις σχέσεις (3.10) και (3.11). Επομένως

$$(U_{x_{Q_i}x_{Q_i}x_{Q_i}} - U_{y_{Q_i}y_{Q_i}z_{Q_i}})(Q_i) \cdot h_{P_i} = \left[ \gamma(k_1^2 - k_2^2) - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_{Q_i}^2} \right] (Q_i) \cdot h_{P_i} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (3.15)$$

Ο πρώτος όρος ισούται περίπου με

$$\varepsilon_1 = \left[ \gamma(k_1^2 - k_2^2) \right] (Q_i) \cdot h_{P_i} \cong 2e'^2 \gamma \sigma \nu v^2 \phi_{P_i} \frac{b^2}{a^4} h_{P_i} \quad (3.16)$$

όπου  $e'$  η δεύτερη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς,  $\gamma$  η τιμή της κανονικής βαρύτητας πάνω στο ελλειψοειδές (στο σημείο  $Q_i$ ),  $a$  και  $b$  οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς, και  $h_{P_i}$  το γεωμετρικό υψόμετρο του σημείου  $P_i$  στην φυσική γήινη επιφάνεια. Στις εξισώσεις (2.1), (2.2) και (2.3) απομονώνουμε τον κοινό τους όρο  $W_{xx} - W_{yy} - (U_{xx} - U_{yy})$  όπου η πρώτη διαφορά υπολογίζεται στο σημείο  $P_i$  από τις μετρήσεις του ζυγού στρέψης και η δεύτερη διαφορά υπολογίζεται στο σημείο  $Q_i$  πάνω στο ελλειψοειδές. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} [W_{xx} - W_{yy} - (U_{xx} - U_{yy})](P_i) \cong & \left( \gamma(Q_i) + \delta g(P_i) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_{Q_i} h_{P_i} \right) \left( 2e'^2 \sigma \nu v^2 \phi_{P_i} \frac{b^2}{a^4} \right) h_{P_i} + \\ & + \left( \delta g(P_i) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_{Q_i} h_{P_i} \right) \left( e'^2 \sigma \nu v^2 \phi_{P_i} \frac{b}{a^2} \right) h_{P_i} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ο διορθωμένος όρος που προτείνεται είναι ο παρακάτω

$$\begin{aligned}
[W_{xx} - W_{yy} - (U_{xx} - U_{yy})](P_i) \cong & \left( 2\gamma(Q_i) + \delta g(P_i) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_{Q_i} h_{P_i} \right) \left( 2e'^2 \sigma \nu^2 \phi_{P_i} \frac{b^2}{a^4} \right) h_{P_i} + \\
& + \left( \delta g(P_i) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_{Q_i} h_{P_i} \right) \left( e'^2 \sigma \nu^2 \phi_{P_i} \frac{b}{a^2} \right) h_{P_i} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_{Q_i}^2} \Big|_{Q_i} h_{P_i}
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Από τις (3.17) και (3.18) παρατηρούμε ότι εάν κάνουμε τις πράξεις το μέγεθος της πρώτης παρένθεσης στο αριστερό μέλος σχεδόν διπλασιάζεται. Προσεγγιστικά για  $\delta g(P_i) = 50 \text{ mgal}$ ,  $h_{P_i} = 1000m$  και  $\varphi = 45^0$  ο πρώτος όρος της σχέσης (3.17) είναι περίπου  $1.6 mE$  και ο δεύτερος  $46.9mE$ . Ο διορθωτικός όρος που εισάγουμε στην (3.17) (βλέπε σχέση (3.18)) είναι περίπου ίσος με  $1.6mE$  δηλαδή μια συνεισφορά 3,3% επί του συνόλου.

#### 4 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή έγινε μια σύντομη περιγραφή προσδιορισμού των στοιχείων της απόκλισης της κατακορύφου με μετρήσεις ζυγού στρέψης. Οι εξισώσεις για τον προσδιορισμό των αποκλίσεων της κατακορύφου εκτός από τις δεύτερες παραγώγους του γήινου βαρυτικού δυναμικού περιέχουν και τις δεύτερες παραγώγους του κανονικού δυναμικού. Οι τιμές των πρώτων (των δευτέρας τάξεως παραγώγων του γήινου βαρυτικού δυναμικού) προσδιορίζονται πάνω στην φυσική γήινη επιφάνεια όμως για τις τιμές των δεύτερων (δευτέρες παράγωγοι του κανονικού δυναμικού) χρησιμοποιούνται αυτές που είναι πάνω στο ελλειψοειδές. Εδώ παρουσιάσαμε μια μέθοδο προσδιορισμού των δευτέρας τάξης παραγώγων του κανονικού δυναμικού πάνω στην φυσική γήινη επιφάνεια. Η συνεισφορά των επί πλέον όρων της διόρθωσης είναι σημαντική και δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αμελητέα. Οι όροι της διόρθωσης βελτιώνουν τις εξισώσεις για τον προσδιορισμό της απόκλισης της κατακορύφου πράγμα που θα οδηγήσει σε καλύτερα αποτελέσματα.

#### Βιβλιογραφία

- 1) Hofmann – Wellenhoff B., Moritz H. (2006): “Physical Geodesy”, Second Edition, Springer Wien – New York, pp. 82, 233.
- 2) Livieratos E. (1976): “On the geodetic singularity problem”, Manuscripta Geodetica, 1, pp. 269 – 292.
- 3) Manoussakis G. (2013): “Estimation of the normal Eötvös matrix for low geometric heights”, Acta Geodetica et Geophysica, vol. 48, No2, pp. 179 – 189.
- 4) Toth Gy., Rozsa Sz., Adam J., and Tziavos I.N. (2001): “Gravity Field Recovery from Torsion Balance Data Using Collocation and Spectral Methods”, Presented at the EGS XXVI General Assembly, Nice, France, March 26 - 30, 2001.

- 5) Völgyesi L. (1993): “Interpolation of the deflection of the vertical based on gravity gradients”, *Periodica Polytechnica Ser. Civil Eng.*, vol 37, No2, pp. 137 – 166.
- 6) Völgyesi L. (1998): “Geoid Computations Based on Torsion Balance Measurements”, *Reports of the Finnish Geodetic Institute* 98, 4, pp. 145 – 151.
- 7) Völgyesi L. (2001): “Local geoid determination based on gravity gradients”, *Acta Geodetica et Geophysica Hungarica*, vol. 36, Issue 2, pp. 153 – 162.