

Το πολύεδρο του Bruns

Δημήτριος Τσούλης

Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
tsoulis@auth.gr

Περίληψη: Η έννοια του τριγωνισμού με τη μορφή μιας τρισδιάστατης γεωμετρικής μοντελοποίησης ενός διατεταγμένου ή μη συνόλου σημείων του τρισδιάστατου χώρου αποτελεί μία τυπική έννοια που εμφανίζεται σε πληθώρα τοπογραφικών και γεωδαιτικών προβλημάτων. Ο Heinrich Bruns σε μία εργασία ορόσημο για την ανάπτυξη της θεωρίας της γεωδαισίας (Bruns, 1878) εξειδίκευσε την έννοια του τριγωνισμού εισάγοντας για πρώτη φορά το γεωμετρικό μοντέλο του πολυέδρου. Το πολύεδρο του Bruns, όπως έμεινε γνωστό στη βιβλιογραφία, αποτέλεσε ένα γεωμετρικό κατασκεύασμα που συνόδεψε ως θεωρητικό υπόβαθρο την ανάπτυξη της φυσικής και δορυφορικής γεωδαισίας, έως την ανάπτυξη και υλοποίηση του παγκόσμιου δορυφορικού συστήματος GPS, όπου από ένα πείραμα της σκέψης έγινε πραγματικότητα.

1. Εισαγωγή

Η έννοια της πολυεδρικής μοντελοποίησης συνδέεται ως γεωμετρικό εργαλείο περισσότερο με προβλήματα εξειδικευμένων κλάδων των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα της υπολογιστικής γεωμετρίας. Με δεδομένο ένα νέφος σημείων ζητείται ο υπολογισμός εκείνου του κλειστού τριγωνισμού που αναπαριστά γεωμετρικά τον αντίστοιχο τρισδιάστατο όγκο. Το στερεό που προκύπτει από αυτήν τη διαδικασία και περιγράφει το γνωστό αντικείμενο, το οποίο στη συνηθέστερη των περιπτώσεων αποτελεί μία τρισδιάστατη κατανομή μάζας, είναι αυτό του γενικευμένου πολυέδρου. Πρόκειται για εκείνο το στερεό που σχηματίζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό επίπεδων όψεων, οι οποίες με τη σειρά τους ορίζονται από έναν πεπερασμένο, αλλά όχι αναγκαστικά ταυτόσημο από όψη σε όψη, αριθμό ακμών. Οι εφαρμογές αυτής της διαδικασίας εντοπίζονται κυρίως σε τρισδιάστατα μοντέλα, γραφικά υπολογιστών αλλά και στην εφαρμοσμένη γεωφυσική.

Ο υπολογισμός του βαρυτικού σήματος μιας υποκείμενης κατανομής μάζας ή η μοντελοποίηση της ελκτικής επίδρασης κοντινών κατανομών σε εργαστηριακές μετρήσεις υψηλής ακρίβειας βρίσκει στο γεωμετρικό μοντέλο του γενικευμένου πολυέδρου ένα ευέλικτο και γρήγορο εργαλείο το οποίο μπορεί να προσαρμοστεί και να περιγράψει και τις πιο μικρές λεπτομέρειες ή τοπικές ανωμαλίες. Η γεωμετρική μοντελοποίηση οδηγεί στην περίπτωση υπολογισμού του βαρυτικού σήματος της αντίστοιχης κατανομής και σε μία εξειδικευμένη μαθηματική διαδικασία υπο-

λογισμού της συνάρτησης του δυναμικού ή κάποιων από τις παραγώγους του που ισχύει για το συγκεκριμένο γεωμετρικό σώμα. Σε αντίθεση δηλαδή με τις υπόλοιπες κατηγορίες εφαρμογών, όπου η γεωμετρική μοντελοποίηση αποτελεί ταυτόχρονα και το τελικό ζητούμενο, στην περίπτωση της αναζήτησης της βαρυτικής επίδρασης η μοντελοποίηση αποτελεί μόνο το πρώτο βήμα καθορισμού της γεωμετρικής μορφής της συνοριακής επιφάνειας της κατανομής. Ο υπολογισμός του σήματος έρχεται σε ένα δεύτερο βήμα, αφού με κάποιο τρόπο προσαρμοστούν τα τρισδιάστατα ολοκληρώματα των ζητούμενων δυναμικών ποσοτήτων στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Για την περίπτωση της πολυεδρικής μοντελοποίησης οι μαθηματικές εκφράσεις για τη συνάρτηση του δυναμικού έλξης, τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους της επιλύονται αναλυτικά οδηγώντας σε κλειστές σχέσεις που ορίζονται με τη μορφή αθροισμάτων που διατρέχουν όλες τις ακμές και όλες τις όψεις της πολυεδρικής πηγής (Tsoulis, 2012).

Στην περίπτωση ενός κλασικού τοπογραφικού δικτύου που ορίζεται για μία ευρύτερη περιοχή και αναπαριστά τις γωνίες και τις αποστάσεις που μετρούνται αμοιβαία στο πεδίο από ένα πεπερασμένο πλήθος κορυφών, προκύπτει επίσης ένας τρισδιάστατος τριγωνισμός. Από γεωμετρική σκοπιά όμως δεν υπάρχει άμεση αντιστοιχία με τον κλειστό τριγωνισμό ενός πολυέδρου. Ο τριγωνισμός ενός τοπογραφικού δικτύου ορίζει από μία αυστηρή γεωμετρική σκοπιά μία ανοικτή επιφάνεια δύο όψεων, η οποία σχηματίζεται από τα επί μέρους τριγωνικά στοιχεία που προκύπτουν από την απευθείας σύνδεση ανά τριών των κορυφών του δικτύου με ευθύγραμμα τμήματα. Ωστόσο, εάν υποθέσουμε ότι είναι διαθέσιμες οι κορυφές και οι αντίστοιχες παρατηρήσεις ενός *παγκόσμιου τέτοιου δικτύου*, όταν δηλαδή επεκτείνουμε τα όρια της περιοχής κάλυψης στο σύνολο της γης, τότε ο γεωμετρικός τριγωνισμός που θα προκύψει αντιστοιχεί πράγματι στην κλειστή επιφάνεια ενός πολυέδρου. Σε αυτή τη σκέψη βασίζεται το λεγόμενο πολυέδρο του Bruns, που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

2. Heinrich Bruns (1848-1919)

Ο Heinrich Bruns γεννήθηκε στις 4 Σεπτεμβρίου 1848 στο Βερολίνο. Σπούδασε μαθηματικά, αστρονομία και φυσική στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, το σημερινό Πανεπιστήμιο Humboldt. Το 1871 έλαβε το διδακτορικό δίπλωμα υπό την καθοδήγηση των σπουδαιών γερμανών μαθηματικών Ernst Kummer (1810-1893) και Karl Weierstrass (1815-1897). Στη διατριβή του ο Bruns πραγματεύεται ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης του δυναμικού για την περίπτωση ομογενών κατανομών, καταλήγοντας σε μία εργασία που σήμερα θα την κατατάσσαμε στο αντικείμενο της θεωρίας δυναμικού. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι η έννοια του πολυέδρου εμφανίζεται ήδη στη διατριβή του, καθώς ο Bruns κάνει αναφορά στις εργασίες των Mehler (1866) και Mertens (1868), οι οποίες αποτελούν τις πρώτες βιβλιογραφικές αναφορές που είναι αφοσιωμένες στη μελέτη του πολυεδρικού βαρυτι-

κού σήματος και είναι δημοσιευμένες στο περιοδικό *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, το οποίο με έτος ίδρυσης το 1826 αποτελεί την αρχαιότερη περιοδική έκδοση στον κλάδο των μαθηματικών που εκδίδεται μέχρι σήμερα.

Μετά την απόκτηση του διδακτορικού ο Bruns εργάστηκε ως ερευνητής στα αστροσκοπεία Pulkowa και Dorpat στις σημερινές Ρωσία και Εσθονία αντίστοιχα. Το 1876 διορίστηκε αναπληρωτής καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου και έξι χρόνια αργότερα και σε ηλικία 34 ετών τακτικός καθηγητής αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο του Leipzig και διευθυντής του εκεί αστροσκοπείου. Την ίδια χρονιά (1882) εξελέγη μέλος της ακαδημίας επιστημών Leopoldina.

Ο Bruns ασχολήθηκε με πολλά προβλήματα της αστρονομίας, των μαθηματικών και της γεωδαισίας. Έχοντας ένα στέρεο μαθηματικό υπόβαθρο οι συνεισφορές του στο αντικείμενο της θεωρίας δυναμικού ήταν ιδιαίτερα σημαντικές και πρωτοπόρες. Η εργασία του στο Πρωσικό Γεωδαιτικό Ινστιτούτο σχετικά με το σχήμα της γης, που θα μας απασχολήσει εδώ σε ότι αφορά τη χρήση της πολυεδρικής γεωμετρίας, αποτελεί μία εργασία ορόσημο για την επιστήμη της γεωδαισίας. Σε αυτήν ο Bruns διατυπώνει την άποψη ότι το πρόβλημα του προσδιορισμού του σχήματος της γης δεν μπορεί να περιορίζεται στη χρήση μόνο των γεωδαιτικών εκείνων παρατηρήσεων που οδηγούν στη μέτρηση του μήκους τόξου μίας μοίρας (*Gradmessungen*), όπως ήταν η βασική πρακτική εκείνη την εποχή, αλλά θα πρέπει να ενσωματώνει διαφορετικούς τύπους δεδομένων, όπως παρατηρήσεις αστρονομικού προσδιορισμού, τριγωνισμού, τριγωνομετρικής και γεωμετρικής χωροστάθμησης και βαρύτητας. Ο συνδυασμός αυτών των ετερογενών δεδομένων οδηγεί σε μία επίλυση του μαθηματικού προβλήματος του προσδιορισμού του σχήματος της γης, η οποία παρουσιάζεται με μία απaráμιλλη θεωρητική κομψότητα από τον Bruns. Σε αυτήν την προσέγγιση το σχήμα του πολυέδρου αποτελεί το γεωμετρικό υπόβαθρο επάνω στο οποίο αναφέρονται όλα τα προηγούμενα δεδομένα γεωμετρικού και δυναμικού τύπου.

3. Η χρήση του πολυέδρου στον προσδιορισμό του σχήματος της γης

Η εργασία του Bruns για το μαθηματικό προσδιορισμό του σχήματος της γης (Bruns, 1878) συνδυάζει την κομψή θεωρία με την πρακτική εφαρμογή. Η γραφή του συγγραφέα αναδεικνύει τόσο την οπτική γωνία ενός θεωρητικού, για τον οποίο είναι σημαντική η αυστηρή διατύπωση του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει το πρόβλημα που εξετάζει, ταυτόχρονα όμως η χρήση των πραγματικών γεωδαιτικών παρατηρήσεων και ο πρακτικός τρόπος εφαρμογής τους για την υλοποίηση της συγκεκριμένης θεωρίας διατρέχουν το σύνολο της εργασίας, προσδίδοντας σε αυτήν, κατά τη γνώμη μου, τη μεγάλη αξία που όλοι αναγνωρίζουν.

Στην πρώτη ενότητα της εργασίας δίνονται οι βασικοί θεωρητικοί ορισμοί. Η συνάρτηση του ελκτικού δυναμικού των γήινων μαζών V , η συνάρτηση του δυναμι-

κού της βαρύτητας W και η θεμελιώδης σχέση μεταξύ του μέτρου της πραγματικής βαρύτητας g και της γεωμετρίας των ισοδυναμικών επιφανειών του πεδίου βαρύτητας

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} \quad (1)$$

με n να συμβολίζει τη διεύθυνση της καθέτου στην ισοδυναμική επιφάνεια της συνάρτησης του δυναμικού W , εμφανίζονται με τον ίδιο συμβολισμό που χρησιμοποιούνται και σήμερα στη γεωδαιτική βιβλιογραφία. Το ίδιο ισχύει και για την επόμενη ενότητα της εργασίας, στην οποία παρουσιάζονται εξειδικευμένες εκφράσεις από τη θεωρία δυναμικού, που αφορούν την επιφάνεια του γεωειδούς και τις ασυνέχειες των παραγώγων της συνάρτησης W , στις περιπτώσεις που εμφανίζονται ασυνέχειες στην τρισδιάστατη κατανομή πυκνότητας των γήινων μαζών.

Οι επόμενες ενότητες καταπιάνονται ξεχωριστά με τις διαφορετικές κατηγορίες γεωδαιτικών δεδομένων και με τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι παρατηρήσεις πεδίου μπορεί να ενσωματωθούν στο γενικό μαθηματικό μοντέλο που παρουσιάστηκε προηγουμένως. Αποκλίσεις της κατακορύφου, αστρονομικές και τριγωνομετρικές παρατηρήσεις, δεδομένα γεωμετρικής χωροστάθμησης και δεδομένα βαρύτητας, εξετάζονται από την καθαρά πρακτική σκοπιά της εφαρμογής. Με ποιον τρόπο δηλαδή μπορούν όλα αυτά τα δεδομένα να αξιοποιηθούν για τον κοινό σκοπό μιας αυστηρής επίλυσης του αρχικού προβλήματος, που είναι ο προσδιορισμός του μαθηματικού σχήματος της γης, δηλαδή της επιφάνειας του *γεωειδούς*.

Η γεωμετρική έννοια του πολυέδρου εμφανίζεται στην τελευταία ενότητα της εργασίας, όταν ο Bruns προτείνει για την αυστηρή επίλυση του προβλήματος του προσδιορισμού της επιφάνειας του γεωειδούς τη συνδυασμένη αξιοποίηση όλων των παραπάνω γεωδαιτικών δεδομένων πεδίου. Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι η επιφάνεια βάσης πάνω στην οποία θα αναφέρονται όλα τα επί μέρους δεδομένα θα είναι η κλειστή επιφάνεια ενός πολυέδρου, το οποίο θα περικλείει τη γη στο σύνολό της. Οι κορυφές αυτού το πολυέδρου θα ταυτίζονται με τα σημεία στάσης του παγκόσμιου τριγωνομετρικού δικτύου ενώ οι ακμές του θα προκύπτουν από τις επί μέρους διευθύνσεις που θα ορίζουν τις πλευρές αυτού του δικτύου σε παγκόσμια κλίμακα.

Ο Bruns, επηρεασμένος από τις καμπάνιες της εποχής για τον προσδιορισμό του μήκους τόξου μίας μοίρας, αναγνωρίζει τους περιορισμούς μιας τέτοιας εφαρμογής υπογραμμίζοντας ως ένα βασικό πρόβλημα την *ατμοσφαιρική διάθλαση*, η οποία θα περιόριζε το μήκος των πλευρών του δικτύου αυξάνοντας έτσι το χρόνο και το κόστος της υλοποίησής του. Σχολιάζει μάλιστα με ιδιαίτερα διορατικό τρόπο, ότι ο συγκεκριμένος περιορισμός θα αποτελέσει έναυσμα για μία πιο συστηματική ενασχόληση με τον τρόπο μοντελοποίησης της ατμοσφαιρικής διάθλασης στις γεωδαιτικές μετρήσεις, ο οποίος εκείνη την εποχή, αλλά και για τη βιβλιογραφία που

ακολούθησε για πολλά ακόμα χρόνια αντιμετώπιζε με τρόπο γεωμετρικό και αρκετά προσεγγιστικό τη συγκεκριμένη επίδραση αγνοώντας τις φυσικές παραμέτρους του φαινομένου.

Ο Bruns με απλό και παραστατικό τρόπο περιγράφει τον ουσιαστικό ρόλο του πολυεδρικού τριγωνισμού. Μεταξύ δύο οποιοδήποτε κορυφών p και q ορίζεται η αντίστοιχη και μοναδική διαφορά δυναμικού $Wp - Wq$. Αυτή η θεωρητική ποσότητα μπορεί να προκύψει αριθμητικά από το πρακτικό αποτέλεσμα της γεωμετρικής χωροστάθμησης μεταξύ των δύο σημείων. Ταυτόχρονα, κάθε μία κορυφή του πολυέδρου αποτελεί και ένα σταθμό παρατήρησης αζιμουθίου και ζενίθιας γωνίας από το συγκεκριμένο σημείο προς όλα τα γειτονικά σημεία του παγκόσμιου πολυεδρικού δικτύου.

Συνδυάζοντας όλα τα γεωμετρικά δεδομένα του παγκόσμιου τριγωνομετρικού δικτύου σε μία ενιαία συνόρθωση, προκύπτει το γεωμετρικό σχήμα του γήινου πολυέδρου, βεβαίως μέσα στα όρια της ακρίβειας που αντιστοιχούν στα συγκεκριμένα πρωτογενή δεδομένα. Χρησιμοποιώντας τώρα τα υψόμετρα από τη στάθμη της θάλασσας που υπολογίζονται για κάθε μία πολυεδρική κορυφή από την κοινή επεξεργασία των δεδομένων της γεωμετρικής χωροστάθμησης και των μετρήσεων βαρύτητας, τότε προκύπτουν οι συντεταγμένες των προβολών των πολυεδρικών κορυφών επάνω στην επιφάνεια του γεωειδούς κατά μήκος της κάθετης διεύθυνσης στη συγκεκριμένη επιφάνεια. Τα σημεία που προκύπτουν μέσα από αυτήν τη διαδικασία ορίζουν ένα είδος παγκόσμιου δικτύου σημείων γεωειδούς πρώτης τάξης. Το συγκεκριμένο δίκτυο μπορεί στη συνέχεια, σύμφωνα πάντοτε με τον Bruns, να χρησιμοποιηθεί ως η βάση για τον ορισμό πολλών νέων σημείων αξιοποιώντας επιπρόσθετα δεδομένα γεωμετρικής και τριγωνομετρικής χωροστάθμησης και προσφέροντας έτσι μέσα από την πύκνωση του αρχικού δικτύου μία πιο λεπτομερή εικόνα του γεωειδούς σε τοπική ή περιφερειακή κλίμακα.

4. Συμπερασματικά σχόλια

Η εργασία του Bruns για το μαθηματικό σχήμα της γης καθόρισε την εξέλιξη και τη διαμόρφωση γνωστικών αντικειμένων εντός της επιστήμης της γεωδαισίας, όπως τη δορυφορική και τη φυσική γεωδαισία. Η επεξεργασία ετερογενών δεδομένων αλλά κυρίως η ολοκληρωμένη θεώρηση όλων των πρωτογενών παρατηρήσεων που συνδέονται με το δυναμικό σύστημα της γης βρίσκει εφαρμογή ακόμα και στις μέρες μας με χαρακτηριστικό παράδειγμα το επίσημο όργανο της διεθνούς ένωσης γεωδαισίας για ένα παγκόσμιο σύστημα παρατήρησης (Global Geodetic Observing System, GGOS). Αποτελεί ένα σπάνιο παράδειγμα της καθολικής επιρροής μίας μοναδικής εργασίας σε μία ολόκληρη επιστήμη. Τέλος, προκαλεί θαυμασμό ο τρόπος με τον οποίο ο Bruns συλλαμβάνει τη συνολική εικόνα του προβλήματος καθώς και η πυκνότητα των μαθηματικών προτάσεων με τις οποίες δια-

τυπώνει τη θεωρητική περιγραφή της λύσης. Στην εποχή της απόλυτης εξειδίκευσης κείμενα σαν και αυτό προσφέρουν μία ανανεωτική πνοή στη σκέψη μας.

Αναφορές

Bruns H (1878) Die Figur der Erde: ein Beitrag zur Europäischen Gradmessung. Publikation des Königlichen Preussischen Geodätischen Institutes, 49pp

Mehler FG (1866) Über die Anziehung eines homogenen Polyeders. Journal für die reine und angewandte Mathematik LXVI: 375-381

Mertens F (1868) Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders. Journal für die reine und angewandte Mathematik LXIX: 286-288

Tsoulis D (2012) Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals, Geophysics, **77 (2)**: F1-F11