Σημειώσεις :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

υ. 0.05

Θ. Κεχαγιάς

Σεπτεμβριος 2016

Περιεχόμενα

Προλογος

Το ακουω, το ξεχναω.
Το βλεπω, το θυμαμαι.
Το κανω, το μαθαινω.

Το παρον τεύχος περιεχει συντομες σημειωσεις θεωριας, λυμενες και αλυτες ασκησεις για τον Λογισμο [1] Συναρτησεων μιας Μεταβλητης.

Το τεύχος προορίζεται για χρήση από τους φοιτητές της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, ως συμπλήρωμα των διδακτικών βιβλίων που διανέμονται σε αυτούς. Σε κάθε φοιτητή που θα χρησιμοποιήσει αυτό το τεύχος (και γενικότερα σε κάθε φοιτητή που μελετά τα μαθηματικά) έχω να δώσω τρεις συμβουλές.

1. Λύσε όσο περισσότερα προβλήματα μπορείς.
2. Δείξε εμπιστοσύνη.
3. Μην κάνεις την ζωή σου πιο δύσκολη από όσο είναι απολύτως απαραίτητο.

Πιο αναλυτικά, η πρώτη συμβουλή έχει το εξής νόημα. Κατά την γνώμη μου, για τους περισσότερους από εμάς, **ο μόνος τρόπος** εξοικείωσης με τα μαθηματικά είναι **η επίλυση προβλημάτων: όσο περισσότερα προβλήματα λυσεις, τόσο καλύτερα**. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, στο παρόν τεύχος η Θεωρια παρουσιάζεται σε μεγάλη συντομία, ενώ παρατίθεται μεγάλος αριθμός λυμένων και άλυτων **προβλημάτων**. Πρέπει να χρησιμοποιησεις τα λυμένα προβλήματα ως ένα ενδιάμεσο βοήθημα για την επίλυση των άλυτων. Με άλλα λόγια **δεν αρκεί να μελετησεις μόνο τα ήδη λυμένα προβλήματα ... αν δεν λυσεις ο ιδιος μεγάλο αριθμό αλύτων προβλημάτων δεν θα ωφεληθεις ιδιαίτερα**.

Η δεύτερη συμβουλή αφορα πολλες πλευρες της εκπαιδευτικης διαδικασιας, αλλα εδω σημειωνω την πρακτικα πιο σημαντικη: παρά την αντίθετη εντύπωση ορισμένων φοιτητών, ο σκοπός του διδάσκοντα **δεν** είναι να κόψει όσο γίνεται περισσότερους φοιτητές ... συνήθως μάλιστα συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο.

Το νόημα της τρίτης συμβουλής είναι το εξής: όταν προσπαθεις να λυσεις ένα πρόβλημα, ξεκινησε από την πιο απλή δυνατή λύση που μπορεις να φανταστεις ... και μετά προσπαθησε

[1] Δηλ. *παραγωγιση* και *ολοκληρωση*.

να την απλοποιησεις ακόμα περισσότερο. Αν η απλή λύση δεν δουλεύει, μπορεις παντα να δοκιμασεις μια πιο περίπλόκη. Αντίθετα είναι δύσκολο, όταν εχεις δημιουργήσει ένα περίπλοκο μοντέλο, να αφαιρεσεις από αυτό στοιχεία και να το κανεις απλούστερο. Ή, με άλλα λόγια, είναι ευκολότερο να αρχισεις με λίγα συστατικά και να προσθετεις ακόμα ένα κάθε φορά που το χρειαζεσαι[2].

Η έμφαση του παρόντος τεύχους είναι σε **υπολογιστικά** και όχι σε **αποδεικτικά προβλήματα**. Όπου εμφανίζονται αποδείξεις, το ύφος αυτών είναι διδακτικό και όχι απαραίτητα αυστηρό. Οι αποδείξεις παρουσιάζονται για να οξύνουν την διαίσθηση και την κατανόηση σου. Όλες οι αποδείξεις που παρουσιάζω θα μπορούσαν να «αυστηροποιηθούν», αλλά αυτό εκφεύγει από τους στόχους του παρόντος τεύχους.

Το τεύχος δεν έχει ακόμη πάρει την τελική του μορφή. Είναι (πολυ) πιθανόν κάποιες λύσεις και απαντήσεις να περιέχουν λάθη. Καθώς θα εξελίσσεται η αποσφαλμάτωση και θα διορθώνονται τα λάθη, θα δημοσιεύω βελτιωμένες εκδόσεις. Χρησιμοποιώντας την ορολογία ανάπτυξης λογισμικού, η παρούσα έκδοση είναι *beta* με κωδικό *υ*.0.05. Σε κάθε περίπτωση ελπίζω (και πιστεύω) ότι το παρόν τεύχος θα αποδειχτεί αρκετά χρήσιμη στους φοιτητές.

Θανασης Κεχαγιας
ΤΗΜΜΥ, Πολυτεχνικη Σχολη ΑΠΘ
Νοεμβρης 2016

[2]Η τριτη συμβουλη εχει γενικοτερη εφαρμογη σε ολες τις πτυχες της ζωης σου.

Εισαγωγη

Η λέξη «*Λογισμός*» (στα Αγγλικά «*Calculus*») μπορεί να έχει πολλές έννοιες, αλλά η συνηθέστερη χρήση της στα μαθηματικά είναι στην φράση «Λογισμός Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής»[3] και, σε πρωτη προσεγγιση, σημαίνει την *παραγώγιση και ολοκλήρωση συναρτήσεων* $f(x)$. Και αυτό είναι το κύριο αντικείμενο του παρόντος μερους των σημειωσεων.

Ωστόσο η βασική ιδέα του Λογισμού (Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής) είναι η χρήση των *ορίων*, και κυριως ενός συγκεκριμένου τύπου ορίων. Μας δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$ και μελετούμε την μεταβολή της συνάρτησης $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ όταν το x μεταβάλλεται και γίνεται $x + \Delta x$· επιπλέον, μας ενδιαφέρει η περίπτωση στην οποία το Δx είναι *απειροστικά* μικρό, δηλ. τόσο μικρό που *τείνει στο μηδέν*. Αυτη ειναι η *παραγωγιση*. Η δε *ολοκλήρωση* είναι η *αντιστροφη* διαδικασια της παραγωγισης.

Αυτές οι ιδέες είναι πολύ χρήσιμες σε διάφορα μαθηματικά προβλήματα και (σε πρώιμη μορφή) ήταν ήδη γνωστές στους αρχαίους Έλληνες[4]. Όμως η χρήση αυτών καθιερώθηκε από τους Ευρωπαίους μαθηματικούς του 17ου αιώνα. Επιπλέον, αυτοί ανέπτυξαν μεθόδους που επιτρέπουν την χρήση των ορίων σε πολλά διαφορετικά προβλήματα με έναν ενοποιημένο και σχεδόν μηχανικό τρόπο ο οποίος μας επιτρέπει να επιλύουμε προβλήματα (π.χ., υπολογισμό εμβαδών, μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση συναρτήσεων) τα οποία πριν την ανάπτυξη του Λογισμού είχαν δυσκολέψει μερικούς από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς.

Αυτά είναι μερικα απο τα θεματα με τα οποια θα ασχοληθουμε στο παρον τευχος. Με τον ορο «*συναρτηση μιας μεταβλητης*» εννοούμε μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ο *Λογισμός των Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής* είναι η μελέτη μεθόδων παραγώγισης και ολοκλήρωσης τέτοιων συναρτήσεων καθώς και των σχετικών εφαρμογών. Επίσης σχετική είναι και η μελέτη των *ακολουθιων*, των *απειρων αθροισματων* και των *δυναμοσειρων*. Τελος, θα ασχοληθούμε με τις *διαφορικες εξισωσεις* (εξισωσεις με παραγωγους) στα τελευταία κεφάλαια του παρόντος μερους.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τυπικό μαθηματικό συμβολισμό, ο οποίος σου είναι γνωστός από το Λύκειο. Σημειώνουμε ιδιαίτερα τα εξής.

1. Η τετραγωνική ρίζα του -1 συμβολίζεται με $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

2. Ο συζυγης μιγαδικος του z ειναι ο $\overline{z}$, δηλ. $\overline{x + iy} = x - iy$.

3. Χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς συνόλων.

    (α΄) $\mathbb{N}$: το σύνολο των φυσικών αριθμών: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

[3] Και η δεύτερη πιο συνηθισμένη χρήση είναι στην φράση «Λογισμος Συναρτησεων Πολλων Μεταβλητων».

[4] Π.χ., την είχε χρησιμοποιήσει ο Αρχιμήδης.

(β′) $\mathbb{Z}$: το σύνολο των ακέραιων αριθμών: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(γ′) $\mathbb{Q}$: το σύνολο των ρητών πραγματικών αριθμών.

(δ′) $\mathbb{R}$: το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(ε′) $\mathbb{R}^*$: το *επεκτεταμένο* σύνολο των πραγματικών αριθμών: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(ϝ′) $\mathbb{C}$: το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

4. Ο *συμβολισμός αθροίσματος* είναι: $\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$.

5. Η λέξη «*ανν*» σημαίνει «αν και μόνο αν».

Κεφάλαιο 1

Οριο και Συνεχεια

Ο Λογισμος συναρτησεων μιας μεταβλητης βασιζεται στην εννοια του οριου.

1.1 Θεωρια και Παραδειγματα

1.1.1. Ορισμος: Λέμε ότι το *όριο* της συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι ο αριθμός f_0 ανν ισχύει η εξής συνθήκη

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Αν ισχύει η (1.1), λέμε και ότι η $f(x)$ *τείνει* στο f_0 όταν το x *τείνει* στο x_0 και γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0 \quad \text{ή} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\to} f_0.$$

Αν *δεν* ισχύει η (1.1), λέμε ότι το όριο (της $f(x)$ όταν το x *τείνει* στο x_0) δεν υπάρχει.

1.1.2. Παρατηρηση: Η σημασία της (1.1) είναι η εξής: αν θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι η διαφορά των $f(x)$ και f_0 είναι όσο μικρή θέλουμε (μικρότερη του τυχόντος ε), αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι το x είναι πολύ κοντά στο x_0 (συγκεκριμένα, ότι $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$). Προσέξτε ότι το δ_ε γενικα θα εξαρταται απο το ε! Απο ποια αλλη ποσοτητα θα εξαρταται το δ_ε; Επισης προσεξτε οτι στην (1.1) *δεν* εξετάζουμε την περίπτωση $x = x_0$ (δηλ. $|x - x_0| = 0$).

1.1.3. Ασκηση: Δείξε με ένα *υπολογιστικό επιχείρημα* ότι $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών $\left(x, \frac{1}{x+2}\right)$.

x	1.000	0.100	0.010	0.001	−0.100	−0.010	−0.001
$\frac{1}{x+2}$	0.333 33	0.47619	0.49751	0.49975	0.52632	0.50251	0.50025

Παρατηρούμε ότι όσο εγγύτερα βρίσκεται το x στο 0, τόσο εγγύτερα βρίσκεται το $\frac{1}{x+2}$ στο $\frac{1}{2} = 0.5$, και αυτό ισχύει για x είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο του 2. Αυτό το γεγονός διατυπώνεται μαθηματικά με την έκφραση «$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$».

1.1.4. Ασκηση: *Αποδειξε* ότι $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.
Λύση. Ο πίνακας της παραπάνω Ασκησης αποτελεί μια *ένδειξη* ότι $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, αλλά όχι μια *μαθηματική απόδειξη*. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, χρησιμοποιούμε τον ορισμό

του ορίου. Δεδομένου τυχόντος $\varepsilon > 0$ θέλουμε να βρούμε αντίστοιχο δ_ε τέτοιο ώστε να ισχύει: $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$, όπου $x_0 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$ και $f_0 = \frac{1}{2}$. Για να βρουμε το ζητουμενο δ_ε ας εξετασουμε τις παρακατω ισοδυναμιες:

$$\left|\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2-x-2}{2(x+2)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x|}{2|x+2|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < 2\varepsilon|x+2|$$

Και τωρα ας *υποθεσουμε* οτι $|x| < \min(2\varepsilon(2-|x|), 2)$. Τοτε

$$|x| < 2\varepsilon(2-|x|) \Leftrightarrow (1+2\varepsilon)|x| < 4\varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}.$$

Αυτο μας δινει την ιδεα να χρησιμοποιησουμε $\delta_\varepsilon = \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$. Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned}
0 < |x| < \delta = \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon} &\Rightarrow 0 < |x|(1+2\varepsilon) < 4\varepsilon \Rightarrow 0 < |x| < 4\varepsilon - 2\varepsilon|x| \\
&\Rightarrow 0 < |x| < 2\varepsilon(2-|x|) \leq 2\varepsilon(|x+2|) \Rightarrow 0 < \left|\frac{x}{x+2}\right| < 2\varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{x+2-2}{x+2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\left|1 - \frac{2}{x+2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x+2}\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.1.5. Ορισμος: Λέμε ότι το *όριο* της συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει στο ∞ είναι ο αριθμός f_0 ανν ισχύει η εξής συνθήκη:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0 : M_\varepsilon < x \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Αντίστοιχα λέμε ότι το *όριο* της συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει στο $-\infty$ είναι ο αριθμός f_0 ανν ισχύει η εξής συνθήκη:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon < 0 : x < M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Γράφουμε δε

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f_0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = f_0.$$

Αν *δεν* ισχύει η (1.2) (αντίστοιχα η (1.3)) λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x *τείνει* στο ∞ (αντίστοιχα το όριο της $f(x)$ όταν το x *τείνει* στο $-\infty$) δεν υπάρχει.

1.1.6. Παρατηρηση: Η σημασια των (1.2) και (1.3) ειναι η εξης: $\lim_{x\to\infty} f(x) = f_0$ ανν ισχυει η (1.2) δηλ.

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists M_\varepsilon > 0 : M_\varepsilon < x \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon.$$

Με αλλα λογια, $\lim_{x\to\infty} f(x) = f_0$ ανν για καθε ε (οσο μικρο θελουμε) μπορουμε να βρουμε ενα M_ε τετοιο ωστε, οταν το x ειναι μεγαλυτερο του M_ε τοτε η διαφορα $f(x)$ και f_0 ειναι (κατ' απολυτη τιμη) μικροτερη του ε. Δηλ., ακομη πιο συντομα, μπορουμε να φερουμε την $f(x)$ οσο κοντα στο f_0 θελουμε, αρκει να παρουμε το x αρκετα μεγαλο. Η σημασια της (1.3) εξηγειται παρομοια.

1.1.7. Ασκηση: Δείξτε με ένα υπολογιστικό επιχείρημα ότι $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών $\left(x,\frac{1}{x}\right)$.

x	1.0000	10.0000	100.0000	1000.0000	10000.0000
$\frac{1}{x}$	1.0000	0.1000	0.0100	0.0010	0.0001

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο γίνεται το x, τόσο εγγύτερα βρίσκεται το $\frac{1}{x}$ στο 0. Αυτό το γεγονός διατυπώνεται μαθηματικά με την έκφραση «$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$».

1.1.8. Ασκηση: *Αποδειξε* ότι $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.
Λύση. Χρησιμοποιουμε τον ορισμό του ορίου. Δεδομένου τυχόντος $\varepsilon>0$ θέλουμε να βρούμε αντίστοιχο $M_\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$x>M_\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

Αλλα, θετοντας $M_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}>0$ εχουμε

$$|x|=x>M_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}>0\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.1.9. Ορισμος: Λέμε ότι το *όριο* της συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το ∞ ανν ισχύει η εξής συνθήκη:

$$\forall M>0,\exists\delta_M>0:0<|x-x_0|<\delta_M\Rightarrow f(x)>M. \tag{1.4}$$

Αντίστοιχα λέμε ότι το *όριο* της συνάρτησης $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 να είναι το $-\infty$ ανν ισχύει η εξής συνθήκη:

$$\forall M<0,\exists\delta_M>0:0<|x-x_0|<\delta_M\Rightarrow f(x)<M. \tag{1.5}$$

Γράφουμε δε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,\qquad\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty.$$

Αν **δεν** ισχύει μία από τις (1.4) και (1.5), λέμε ότι το αντίστοιχο όριο δεν υπάρχει.

1.1.10. Παρατηρηση: Η σημασια των (1.4) και 1.5) ειναι η εξης: $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ ανν για καθε M (οσο μεγαλο θελουμε) μπορουμε να βρουμε ενα δ_M τετοιο ωστε, οταν το x ειναι αρκετα κοντα στο x_0 (δηλ. οταν $|x-x_0|<\delta_M$) τοτε η $f(x)$ ειναι μεγαλυτερη του M. Δηλ., ακομη πιο συντομα, μπορουμε να κανουμε την $f(x)$ οσο μεγαλη θελουμε, αρκει να παρουμε x αρκετα κοντα στο x_0. Η σημασια της (1.5) εξηγειται παρομοια.

1.1.11. Παρατηρηση: Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε (όταν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty,\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

1.1.12. Ασκηση: Δείξτε με ένα υπολογιστικό επιχείρημα ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών $\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$.

x	1.0000	0.1000	0.0100	0.0010
$\frac{1}{x^2}$	1.0000	100.0000	1000.0000	1000000.0000

Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερο γίνεται το x, τόσο μεγαλύτερο γίνεται το $\frac{1}{x^2}$. Αυτό το γεγονός διατυπώνεται μαθηματικά με την έκφραση «$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\infty$».

1.1.13. Ασκηση: *Αποδειξε* ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.
Λύση. Δεδομένου τυχόντος $M>0$ θέλουμε να βρούμε αντίστοιχο δ_M τέτοιο ώστε να ισχύει: $|x|<\delta_M\Rightarrow\frac{1}{x^2}>M$. Αν θεσουμε $\delta_M=\frac{1}{\sqrt{M}}>0$ τοτε εχουμε

$$|x|<\delta_M=\frac{1}{\sqrt{M}}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{x}\right|>\sqrt{M}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}>M$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.1.14. Ορισμος: Λέμε ότι το *εξ αριστερών όριο* της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0 είναι ο αριθμός f_0 ανν ισχύει η εξής συνθήκη:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:0<x_0-x<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f_0|<\varepsilon. \tag{1.6}$$

Αντίστοιχα λέμε ότι το *εκ δεξιών όριο* της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0 είναι ο αριθμός f_0 ανν ισχύει η εξής συνθήκη:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:0<x-x_0<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f_0|<\varepsilon. \tag{1.7}$$

Γράφουμε δε

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f_0,\qquad\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f_0.$$

Τα εξ αριστερών και δεξιών όρια λέγονται και *πλευρικά* όρια.

1.1.15. Παρατηρηση: Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε τα όρια

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty,\quad\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty,\quad\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty,\quad\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty.$$

1.1.16. Ασκηση: Δείξτε με ένα υπολογιστικό επιχείρημα ότι (α) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$, (β) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών $\left(x,\frac{1}{x}\right)$.

x	0.10	0.01	0.001	−0.001	−0.01	−0.1
$\frac{1}{x}$	10.00	100.00	1000.000	−1000.0000	−10000.00	−10000.0

Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερο γίνεται το x, τόσο μεγαλύτερη είναι η *απόλυτη* τιμή του $\frac{1}{x}$, αλλά το πρόσημο του εξαρτάται από αυτό του x.

1.1.17. Ασκηση: *Αποδειξε* ότι (α) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, (β) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
Λύση. Θεωρούμε τυχόν $M > 0$ και έχουμε: $0 < x < \delta_M = \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{x}$ το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. Παρόμοια, θεωρούμε τυχόν $M < 0$ και έχουμε: $0 > x > -\delta_M = \frac{1}{M} \Rightarrow M > \frac{1}{x}$ το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

1.1.18. Θεωρημα: Αν για μιά συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Αντίστροφα, αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και είναι ίσο με τα πλευρικά.
Αποδειξη. Απο την υποθεση εχουμε οτι

$$\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists \delta_1 > 0 : 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon_1, \tag{1.8}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists \delta_2 > 0 : -\delta_2 < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon_2. \tag{1.9}$$

Εστω τωρα τυχον ε. Στις (1.8)-(1.9) παιρνουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ και κατοπιν επιλεγουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Τοτε λοιπον

$$\forall x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$
$$\forall x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

οποτε

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

και εχουμε το ζητουμενο.

1.1.19. Ασκηση: Αποδειξε ότι δεν υπαρχει το οριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.
Λύση. Εχουμε ηδη δει οτι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$. Αρα δεν υπαρχει το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

1.1.20. Θεωρημα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g_0$ και $\lim_{x\to x_0} h(x) = h_0$, και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, τοτε $f_0 \leq g_0 \leq h_0$.
Αποδειξη. Λαμβανουμε τυχον $\varepsilon > 0$ και βρισκουμε δ_ε^f, δ_ε^g, δ_ε^h τετοια ωστε

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon^f \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon,$$
$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon^g \Rightarrow |g(x) - g_0| < \varepsilon,$$
$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon^h \Rightarrow |h(x) - h_0| < \varepsilon.$$

Θετουμε $\delta = \min\left(\delta_\varepsilon^f, \delta_\varepsilon^g, \delta_\varepsilon^h\right)$ και επιλεγουμε x_1 τετοιο ωστε $|x_1 - x_0| < \delta$. Τοτε εχουμε

$$f(x_1) - \varepsilon < f_0 < f(x_1) + \varepsilon,$$
$$g(x_1) - \varepsilon < g_0 < g(x_1) + \varepsilon,$$
$$h(x_1) - \varepsilon < h_0 < h(x_1) + \varepsilon.$$

Τοτε εχουμε

$$f_0 - 2\varepsilon < f(x_1) - \varepsilon \leq g(x_1) - \varepsilon < g_0$$
$$g_0 < g(x_1) + \varepsilon \leq h(x_1) + \varepsilon < h_0 + 2\varepsilon.$$

Δηλ. για *καθε* $\varepsilon > 0$ εχουμε

$$f_0 - 2\varepsilon < g_0 < h_0 + 2\varepsilon$$

απο το οποιο προκυπτει το ζητουμενο $f_0 \leq g_0 \leq h_0$ (γιατι;).

1.1.21. Παρατηρηση: Συνήθως δεν υπολογίζουμε το όριο μιας συνάρτησης βάσει των παραπάνω ορισμών, αλλά χρησιμοποιώντας τα επομενα θεωρήματα.

1.1.22. Θεωρημα: Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a$.

1.1.23. Θεωρημα: Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = g_0$, τότε

$$\begin{array}{l}
\lim_{x\to x_0} (kf(x)) = kf_0 \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0 \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f_0 \cdot g_0 \\
\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f_0}{g_0} \qquad (\text{αν } g_0 \neq 0) \\
\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = f_0^n.
\end{array}$$

1.1.24. Ασκηση: Δειξε οτι, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = g_0$, τοτε

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0.$$

Λυση. Απο την υποθεση εχουμε οτι

$$\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon_1, \qquad (1.10)$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g_0| < \varepsilon_2. \qquad (1.11)$$

Εστω τωρα τυχον ε. Στις (1.10)-(1.11) παιρνουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ και κατοπιν επιλεγουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Τοτε λοιπον

$$0 < |x - x_0| < \delta < \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} |f(x) - f_0| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x) - g_0| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (f_0 + g_0)| \leq |f(x) - f_0| + |g(x) - g_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και εχουμε το ζητουμενο.

1.1.25. Θεωρημα: Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$ και $\lim_{x\to f_0} g(x) = g_0$, τότε $\lim_{x\to x_0} (g(f(x))) = g_0$.

1.1.26. Θεωρημα: Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g_0$, $\lim_{x\to x_0} h(x) = h_0$ και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, τότε $f_0 \leq g_0 \leq h_0$.

1.1.27. Θεωρημα: Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty.$$

1.1.28. Θεωρημα: Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty.$$

1.1.29. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{x\to-1}(5x^2+3x-4)$.
Λυση. Εχουμε
$$\lim_{x\to-1}\left(5x^2+3x-4\right)=5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-4=-2.$$

1.1.30. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}$.
Λυση. Εχουμε
$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-1}=-1.$$

1.1.31. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x+4}$.
Λυση. Για το (1) εχουμε
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}}{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$
επειδη: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to\infty}1=1$· $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=3\cdot0$ (εχουμε ηδη δει σε προηγουμενη Ασκηση οτι $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$)· και, παρομοια, $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$.

1.1.32. Ορισμος: Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι *συνεχής στο* x_0 ανν
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1.12}$$
Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι *ασυνεχής στο* x_0 ανν δεν ισχύει η (1.12).

1.1.33. Ορισμος: Η $f(x)$ λέγεται *συνεχής στο σύνολο* $A\subseteq\mathbb{R}$ ανν είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in A$. Όταν απλά λέμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής (χωρίς να προσδιορίζουμε ένα σημείο x_0, ή ένα σύνολο A), εννοούμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής σε *κάθε* σημείο του πεδίου ορισμού της.

1.1.34. Ασκηση: Δειξε οτι η συναρτηση $f(x)=x^2+2x$ ειναι συνεχης στο $x_0=3$.
Λυση. Αφου η $f(x)$ ειναι πολυωνυμικη εχουμε
$$\lim_{x\to3}f(x)=f(x_0)$$
δηλ. ειναι συνεχης στο $x_0=3$. Φυσικα το ιδιο ισχυει για καθε $x_0\in\mathbb{R}$.

1.1.35. Ασκηση: Δειξε οτι η συναρτηση $f(x)=|x|$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.
Λυση. Η συναρτηση μπορει να γραφτει και ως
$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{οταν } x<0\\ x & \text{οταν } x\geq0\end{cases}.$$
Αρα για καθε $x_0\in(0,\infty)$ εχουμε
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=x_0=f(x_0)$$
και για καθε $x_0\in(-\infty,0)$ εχουμε
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-x_0=f(x_0)$$

Αρα η $f(x)$ ειναι σιγουρα συνεχης στο $\mathbb{R}-\{0\}$. Τι γινεται στο $x_0 = 0$; Ευκολα βλεπουμε οτι εχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

και αρα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Αρα η $f(x) = |x|$ ειναι συνεχης σε ολο το $\mathbb{R}$.

1.1.36. Παρατηρηση: Η (1.12) μπορεί να μην ισχύει διότι

1. δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$·
2. ή επειδή δεν ορίζεται το $f(x_0)$·
3. ή επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

1.1.37. Ασκηση: Αποδειξε οτι η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν ειναι συνεχης στο $x_0 = 0$.
Λύση. Αφου δεν υπαρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$, δεν μπορουμε να εχουμε $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = f(0)$.

1.1.38. Ασκηση: Αποδειξε οτι η $f(x) = \frac{1}{x^2}$ δεν ειναι συνεχης στο $x_0 = 0$.
Λύση. Αφου δεν οριζεται το $f(0)$, δεν μπορουμε να εχουμε $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = f(0)$.

1.1.39. Θεωρημα: Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0, το ίδιο ισχύει και για τις

1. $kf(x)$,
2. $f(x) \pm g(x)$,
3. $f(x) \cdot g(x)$,
4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ (αν $f(x_0) \neq 0$).

1.1.40. Ασκηση: Δειξε οτι, αν οι $f(x)$, $g(x)$ ειναι συνεχεις στο x_0, το ιδιο ισχυει και για την $f(x) + g(x)$.
Λυση. Απο την υποθεση εχουμε οτι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Τοτε

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} (f(x)) + \lim_{x\to x_0} (g(x)) = f(x_0) + g(x_0).$$

που ειναι το ζητουμενο.

1.1.41. Θεωρημα: Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.

1.1.42. Ασκηση: Αποδειξε οτι ειναι συνεχεις οι συναρτησεις (α) $p(x) = 2x+1$, (β) $q(x) = (x-1)(x+3)$, (γ) $r(x) = \frac{x}{x^2+1}$, (δ) $s(x) = x^3 + 5x + 1$.
Λύση. (α) Αφου οι συναρτησεις $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1$ ειναι συνεχεις (γιατι;), τοτε και η $p(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ειναι συνεχης. (β) Αφου οι συναρτησεις $g_1(x) = x-1$, $f_2(x) = x+3$ ειναι συνεχεις (γιατι;), τοτε και η $q(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ ειναι συνεχης. (γ) Αφου οι συναρτησεις $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2+1$ ειναι συνεχεις και η $h_2(x)$ δεν μηδενιζεται πουθενα, τοτε και η $r(x) = f_1(x)/f_2(x)$ ειναι συνεχης. (δ) Αφου η $s(x)$ ειναι πολυωνυμικη, ειναι και συνεχης.

1.1.43. Ασκηση: Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$.
Λυση. Η $f(x)$ ειναι πηλικο δυο πολυωνυμικων και αρα συνεχων συναρτησεων. Αρα και η $f(x)$ ειναι συνεχης παντου εκτος των σημειων στα οποια μηδενιζεται ο παρονομαστης, δηλ. των $-2, 2$. Σε αυτα τα σημεια η συναρτηση δεν οριζεται, αρα και δεν μπορει να ειναι συνεχης.

1.1.44. Θεωρημα: Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 και η $g(x)$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g(f(x))$ είναι συνεχής στο x_0.

1.1.45. Παραδειγμα: Εστω $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 1$. Τοτε $h(x) = x^2 + 1 = g(f(x))$. Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $x_0 = 2$ και η $g(x) = x + 1$ ειναι συνεχης στο $f_0 = 4$. Οποτε η $g(f(x))$ ειναι συνεχης το $x_0 = 2$.

1.1.46. Θεωρημα: Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει διάστημα $[a, b]$ το οποίο περιέχει το x_0, και ικανοποιεί

$$x \in [a, b] \Rightarrow f(x) > 0.$$

Αποδειξη. Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, για κάθε ε υπάρχει δ τέτοιο ώστε $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ή και

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Αν πάρω $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, έχω

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x).$$

1.1.47. Παραδειγμα: Η $f(x) = \frac{1}{100} - x^2$ ειναι συνεχης στο $x_0 = 0$ και ισχυει $f(x_0) = \frac{1}{100} > 0$. Το διαστημα $\left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]$ περιεχει το x_0 και ικανοποιει: $\forall x \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right] : 0 < f(x)$.

1.1.48. Θεωρημα (Ενδιάμεσης Τιμής): Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε για κάθε αριθμό c ο οποίος βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, υπάρχει $x \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$.

1.1.49. Παραδειγμα: Η $f(x) = 2x + 5$ ειναι συνεχης στο $[1, 3]$. Εχουμε $f(1) = 7$, $f(3) = 11$. Για καθε $c \in (7, 11)$, η εξισωση $2x + 5 = c$ εχει την λυση $x_c = \frac{1}{2}c - \frac{5}{2} \in (1, 3)$.

1.1.50. Θεωρημα (*Bolzano*): Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και και $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
Αποδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτω ότι $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Ορίζω το σύνολο

$$A = \{x : a < x < b \text{ και } f(x) \leq 0\}.$$

Το A είναι μη κενό (περιέχει το a) και φραγμένο από το b. Τώρα ορίζω το x_0 να είναι το *ελάχιστο άνω φράγμα* του A.[1] Θα είναι $x_0 \in [a, b)$ (γιατί;). Θα δείξω ότι $f(x_0) = 0$. Πραγματι, αν $f(x_0) \neq 0$, χρησιμοποιωντας το προηγουμενο προβλημα, υπαρχει καποιο δ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, το $f(x)$ θα είναι ομοσημο με το $f(x_0)$.

[1]Εδώ υποθέτουμε έμμεσα ότι *υπάρχει* ένας τέτοιος αριθμός x_0. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί χρησιμοποιώντας την *πληρότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμ ών*, θέμα το οποίο εκφεύγει από το αντικείμενο του παρόντος τεύχους. Δες και το *https : //en.wikipedia.org/wiki/Completeness_of_the_real_numbers*.

1. Έστω ότι $f(x_0) > 0$. Τότε (α) $x_0 > a$ και (β) για κάθε $x > x_0 - d$ θα έχουμε $f(x) > 0$. Οπότε το $x_0 - d \in A$ είναι ένα άνω φράγμα του A, αλλά είναι μικρότερο το x_0 και αυτό είναι άτοπο.

2. Έστω ότι $f(x_0) < 0$. Τότε (α) $x_0 < b$ και (β) για κάθε $x < x_0 + d$ θα έχουμε $f(x) < 0$. Αν λάβουμε αρκετά μικρό d, το $x_0 + d \in A$ και τότε το x_0 *δεν* είναι ένα άνω φράγμα του A, και αυτό είναι άτοπο.

Οπότε καταλήγουμε ότι $f(x_0) = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

1.1.51. Παραδειγμα: Η $f(x) = 2x+5$ ειναι συνεχης στο $[-3, 3]$. Εχουμε $f(-3) = -1$, $f(3) = 11$. Η εξισωση $2x + 5 = 0$ εχει την λυση $x_0 = -\frac{5}{2} \in (-3, 3)$.

1.1.52. Θεωρημα: Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι *φραγμένη* στο διάστημα $[a, b]$, δηλ. υπάρχουν αριθμοί $m, M \in \mathbb{R}^*$ τέτοιοι ώστε

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M.$$

1.1.53. Παραδειγμα: Η $f(x) = x^2$ ειναι συνεχης στο $[-3, 3]$. Εχουμε $f(-3) = f(3) = 9$. Ισχυει οτι

$$\forall x \in [-3, 3] : 0 = m \leq f(x) = x^2 \leq M = 9.$$

1.1.54. Θεωρημα (Ακραίας Τιμής): Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Συμβολίζουμε με

1. m το *μέγιστο κάτω φράγμα* των τιμών που παίρνει η $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$·

2. M το *ελάχιστο άνω φράγμα* των τιμών που παίρνει η $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

   Τότε, για κάθε $c \in [m, M]$, υπάρχει $x \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$.

1.1.55. Παραδειγμα: Η $f(x) = x^2$ ειναι συνεχης στο $[-3, 3]$. Εχουμε $\min_{x\in[-3,3]} f(x) = 0$, $\max_{x\in[-3,3]} f(x) = 9$. Για καθε $c \in [0, 9]$, η εξισωση $x^2 = c$ εχει την λυση $x_c = \sqrt{c} \in [-3, 3]$.

1.1.56. Θεωρημα: Αν στο διάστημα $[a, b]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και αυστηρά μονότονη, τότε (στο διάστημα $[a, b]$) η *αντίστροφη συνάρτηση* $f^{-1}(x)$ είναι καλώς ορισμένη και αυστηρά μονότονη.

1.1.57. Παραδειγμα: Η $f(x) = 2x + 5$ ειναι συνεχης και αυστηρα μονοτονη στο $[-3, 3]$. Η συναρτηση $g(x) = \frac{x-5}{2}$ ειναι η αντιστροφη συναρτηση της $f(x)$· δηλ.

$$f(g(x)) = 2\frac{x-5}{2} + 5 = x,$$
$$g(f(x)) = \frac{2x+5-5}{2} = x.$$

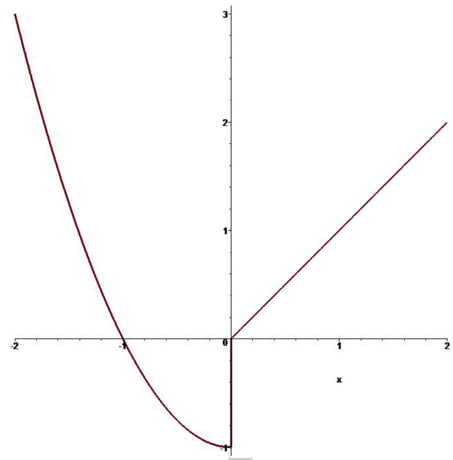
1.1.58. Ορισμος: Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται *τμηματικά συνεχής στο διάστημα* $[a, b]$ ανν το $[a, b]$ μπορεί να διαμεριστεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N]$$

τέτοιων ώστε

1. για καθε $n \in \{1, 2, ..., N-1\} : a_n = b_{n+1}$,
2. η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε $[a_n, b_n]$ και
3. η $f(x)$ έχει πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία $b_1, a_2, b_2, ..., a_N$.

1.1.59. Παραδειγμα: Στο Σχήμα 1.1 βλέπουμε ένα παράδειγμα τμηματικά συνεχούς συνάρτησης.



Σχ.1.1: Μια τμηματικα συνεχης συναρτηση.

1.1.60. Ορισμος: Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα* $[a, b]$ ανν (α) η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και (β) για καθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_\varepsilon > 0$ τετοιο ωστε

$$\forall x_0 \in [a, b] : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Παρομοια, μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα* (a, b) ανν (α) η $f(x)$ είναι συνεχής στο (a, b) και (β) για καθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_\varepsilon > 0$ τετοιο ωστε

$$\forall x_0 \in (a, b) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

1.1.61. Ασκηση: Αποδειξε οτι η $f(x) = x^2$ ειναι ομοιομορφα συνεχης στο $[0, 1]$.
Λυση. Η $f(x) = x^2$ ειναι συνεχης στο $[0, 1]$. Επισης, εστω τυχον $x_0 \in [0, 1]$. Για καθε $x \in [0, 1]$ εχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |(x + x_0)(x - x_0)| \leq 2|x - x_0|$$

αφου $0 \leq x_0 \leq 1$ και $0 \leq x \leq 1$. Οποτε, για καθε $\varepsilon > 0$ θετουμε $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ και εχουμε

$$\forall x_0 \in [0, 1] : |x - x_0| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 2|x - x_0| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

1.1.62. Ασκηση: Αποδειξε οτι η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης ουτε στο $[0, 1]$ ουτε στο $(0, 1)$.
Λυση. Αφου η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν ειναι συνεχης στο $[0, 1]$ (γιατι;) δεν ειναι ουτε και ομοιομορφα συνεχης. Για το διαστημα $(0, 1)$, ας παρουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Εστω τυχον $\delta_\varepsilon > 0$· τωρα θετουμε $\overline{\delta}_\varepsilon = \min(\delta_\varepsilon, 1)$ και $x_0 = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{3} \in (0, 1)$, $x = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{6} \in (0, 1)$. Τοτε

$$|x - x_0| = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{3} - \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{6} = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{6} < \overline{\delta}_\varepsilon < \delta_\varepsilon$$

αλλα

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x - x_0}{xx_0}\right| = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon/6}{\overline{\delta}_\varepsilon^2/18} = \frac{3}{\overline{\delta}_\varepsilon} > 1 = \varepsilon.$$

Αρα για $\varepsilon = 1 > 0$ δεν μπορει να υπαρχει δ_ε τετοιο ωστε

$$\forall x_0 \in (0,1) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

Διοτι τα $\overline{\delta}_\varepsilon = \min(\delta_\varepsilon, 1)$, $x_0 = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{3}$, $x = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{6}$ ικανοποιουν την συνθηκη $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ αλλα παραβιαζουν την συνθηκη $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αρα η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης στο $(0,1)$.

1.1.63. Ασκηση: Ποια ειναι διαφορα της ομοιομορφης συνεχειας απο την απλη συνεχεια;
Λυση. Λεμε οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ ανν για καθε $x_0 \in [a,b]$ εχουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αυτο μπορει να γραφτει πιο αναλυτικα ως εξης: για καθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_\varepsilon > 0$ τετοιο ωστε

$$\forall x_0 \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon(x_0) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Με αλλα λογια, το $\delta_\varepsilon(x_0)$ εξαρταται απο το ε *και απο το* x_0! Στην ομοιομορφη συνεχεια, το δ_ε *δεν* εξαρτατι απο το x_0 (δηλ. μπορουμε να χρησιμοποιησουμε το ιδιο δ_ε για καθε x_0).

1.2 Λυμενα Προβληματα

1.2.1. Ασκηση: Δείξε με ένα *υπολογιστικό επιχείρημα* ότι $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών $\left(x, \frac{1}{x+3}\right)$.

x	1.000	0.100	0.010	0.001	−0.100	−0.010	−0.001
$\frac{1}{x+3}$	0.25000	0.32258	0.33223	0.33322	0.34483	0.33445	0.33344

Παρατηρούμε ότι όσο εγγύτερα βρίσκεται το x στο 0, τόσο εγγύτερα βρίσκεται το $\frac{1}{x+2}$ στο $\frac{1}{2} = 0.5$, και αυτό ισχύει για x είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο του 2. Αυτό το γεγονός διατυπώνεται μαθηματικά με την έκφραση «$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$».

1.2.2. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 0}(x^2 + 1) = 1$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|x^2 + 1 - 1\right| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ οποτε για καθε x τετοιο ωστε $|x - 0| = |x| < \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ εχουμε

$$\left|x^2 + 1 - 1\right| = \left|x^2\right| = |x|^2 < \delta_\varepsilon^2 = \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.2.3. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 2}(2x - 1) = 3$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - 2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |2x - 1 - 3| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ και για καθε x τετοιο ωστε $|x-2| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ εχουμε

$$|2x - 1 - 3| = |2x - 4| = 2\,|x-2| < 2\delta_\varepsilon = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.2.4. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2} = 0$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x-1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}\right| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ και για καθε x τετοιο ωστε $|x-1| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ εχουμε

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}\right| = \left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}\right| = \left|\frac{x-1}{x-2}\right|.$$

Τωρα, εχουμε $|x-1| < \delta$ και

$$|x-2| > ||x-1|-1| = |1-|x-1|| > 1-\delta_\varepsilon$$

(αφου $|x-1| < \delta_\varepsilon$) οποτε

$$\left|\frac{x-1}{x-2}\right| < \frac{\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon}.$$

Αρκει, για να δειξουμε το ζητουμενο οριο, να δειξουμε οτι $\frac{\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon} = \varepsilon$. Αλλα

$$\frac{\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon} = \varepsilon \Leftrightarrow \delta_\varepsilon = \varepsilon\cdot(1-\delta_\varepsilon) \Leftrightarrow \delta_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon\delta_\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \delta_\varepsilon + \varepsilon\delta_\varepsilon = \varepsilon \Leftrightarrow \delta_\varepsilon\cdot(1+\varepsilon) = \varepsilon \Leftrightarrow \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Η τελευταια ισοτητα ισχυει εξ υποθεσεως.

1.2.5. Δειξε οτι $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+1} = 0$ και οτι $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+1} = 0$.
Λυση. Για το πρωτο οριο πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon < 0 : \exists M_\varepsilon > 0 : M_\varepsilon < x \Rightarrow \left|\frac{1}{x^3+1}\right| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $M_\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}-1}$ και για καθε x τετοιο ωστε $x > M_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}-1}} > 0$ εχουμε

$$\left|\frac{1}{x^3+1}\right| < \left|\frac{1}{M_\varepsilon^3+1}\right| = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}-1+1} = \varepsilon$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο. Το δευτερο οριο αποδεικνυεται παρομοια.

1.2.6. Δειξε οτι $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M > 0 : \exists N_M > 0 : N_M < x \Rightarrow M < x^2.$$

Ευκολα φαινεται οτι για τυχον M αρκει να παρουμε $N_M = \sqrt{M}$.

1.2.7. Δειξε οτι $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M < 0 : \exists N_M < 0 : x < N_M \Rightarrow x^3 < N_M.$$

Ευκολα φαινεται οτι για τυχον $M < 0$ αρκει να παρουμε $N_M = M^{1/3}$.

1.2.8. Δείξε με ένα υπολογιστικό επιχείρημα ότι (α) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$, (β) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών $\left(x, \frac{1}{x-2}\right)$. Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερο γίνεται το x, τόσο μεγαλύτερη είναι η *απόλυτη* τιμή του $\frac{1}{x-2}$, αλλά το πρόσημο του εξαρτάται από αυτό του x.

x	2.10	2.01	2.001	1.999	1.99	1.9
$\frac{1}{x-2}$	10.00	100.00	1000.000	−1000.0000	−100.00	−10.0

1.2.9. *Αποδειξε* ότι (α) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$, (β) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.
Λύση. Θεωρούμε τυχόν $M > 0$ και έχουμε: $0 < x - 2 < \delta = \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{x-2}$ το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$. Παρόμοια, θεωρούμε τυχόν $M < 0$ και έχουμε: $0 > x-2 > -\delta = \frac{1}{M} \Rightarrow M > \frac{1}{x-2}$ το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

1.2.10. Δειξε οτι $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M < 0 : \exists \delta_M > 0 : 0 < 0 - x < \delta_M \Rightarrow \frac{1}{x^3} < M.$$

Εστω λοιπον τυχον $M < 0$. Παιρνουμε $\delta_M = \sqrt[3]{\frac{1}{M}} < 0$ και για καθε x τετοιο ωστε $\delta_M < x < 0$ εχουμε

$$\sqrt[3]{\frac{1}{M}} < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{M} < x^3 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} < M.$$

1.2.11. Δειξε οτι $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M > 0 : \exists \delta_M > 0 : 0 < x - 1 < \delta_M \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-1} > M.$$

Εστω λοιπον τυχον $M > 0$. Παιρνουμε $\delta_M = \frac{1}{M}$ και για καθε x τετοιο ωστε $0 < x - 1 < \delta_M = \frac{1}{M}$ εχουμε

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.2.12. Υπολογισε τα παρακατω ορια

1. $\lim_{x\to -1} (2x^3 + 3x^2 - 4)$.

2. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-4x+4}$.

3. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-4x+3}$.

4. $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^4}$.

5. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2+x+1}$.

Λυση. Για το (1) εχουμε

$$\lim_{x\to -1}\left(2x^3+3x^2-4\right) = 2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4 = -3.$$

Για το (2) εχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-4x+4} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^2-4x+4)} = \frac{1-1}{1^2-4\cdot 1+4} = 0$$

οπου χρησιμοποιησαμε οτι ο παρονομαστης ειναι διαφορος του μηδενος. Για το (3) εχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}.$$

Για το (4) εχουμε $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^4} = \sqrt{2^4} = 4$. Για το (5) θετουμε $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 5x^2+3x-4$ και εχουμε

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)} = \sqrt{3}.$$

1.2.13. Υπολογισε τα παρακατω ορια

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-5x+4}$.

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^4-1}$.

3. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$.

4. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

Λυση. Για το (1) εχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-4} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Για το (2) εχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^4-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Για το (3) εχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(1-x^2)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{2^2-x^2-3}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(2+\sqrt{x^2+3}\right) = 4.
\end{aligned}$$

Για το (4) εχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.\end{aligned}$$

1.2.14. Υπολογισε τα παρακατω ορια

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x-1}$.
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{5x-1}$.
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{x^2-1}$.
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x}$.

Λυση. Για το (1) εχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{7}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}}{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

επειδη: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty}1 = 1$· $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 3\cdot 0$ (εχουμε ηδη δει σε προηγουμενη Ασκηση οτι $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$)· και, παρομοια, $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x} = 0$.

Παρομοια, για το (2) εχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{5x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{5-0} = \frac{2}{5}.$$

Για το (3) εχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \frac{0-0}{1-0} = 0.$$

Για το (4) εχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{4}{x}\right) = \infty - 0 = \infty.$$

1.2.15. Δειξε οτι η συναρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ ειναι συνεχης στο $x_0 = 3$.
Λυση. Αφου η $f(x)$ ειναι πολυωνυμικη εχουμε

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(x_0)$$

δηλ. ειναι συνεχης στο $x_0 = 3$. Φυσικα το ιδιο ισχυει για καθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.2.16. Δειξε οτι η συναρτηση $f(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+1}$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.
Λυση. Για καθε $x_0 \in \mathbb{R}$ εχουμε οτι $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$· η μονη πιθανη εξαιρεση ειναι σημεια στα οποια μηδενιζεται ο παρονομαστης της $f(x)$. Αλλα αφου αυτος ειναι x^2+1 τετοια σημεια δεν υπαρχουν στο $\mathbb{R}$, δηλ. η $f(x)$ ειναι συνεχης παντου στο $\mathbb{R}$.

1.2.17. Δειξε οτι η συναρτηση $f(x) = |x-1|$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.
Λυση. Η συναρτηση μπορει να γραφτει και ως

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{οταν } x < 1 \\ x-1 & \text{οταν } x \geq 1 \end{cases}.$$

Αρα για καθε $x_0 \in (1, \infty)$ εχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 = f(x_0)$$

και για καθε $x_0 \in (-\infty, 1)$ εχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -x_0 = f(x_0)$$

Αρα η $f(x)$ ειναι σιγουρα συνεχης στο $\mathbb{R} - \{1\}$. Τι γινεται στο $x_0 = 1$; Ευκολα βλεπουμε οτι εχουμε

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

και αρα

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1).$$

Αρα η $f(x) = |x-1|$ ειναι συνεχση σε ολο το $\mathbb{R}$.

1.2.18. Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$.
Λυση. Η $f(x)$ ειναι πηλικο δυο πολυωνυμικων και αρα συνεχων συναρτησεων. Αρα και η $f(x)$ ειναι συνεχης παντου εκτος των σημειων στα οποια μηδενιζεται ο παρονομαστης, δηλ. των $-3, 3$. Σε αυτα τα σημεια η συναρτηση δεν οριζεται, αρα και δεν μπορει να ειναι συνεχης.

1.3 Αλυτα Προβληματα

1.3.1. Δειξε υπολογιστικα ότι $\lim_{x\to 2}(2x-1) = 3$.

1.3.2. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to 2}(2x-1) = 3$.

1.3.3. Δειξε υπολογιστικα ότι $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$.

1.3.4. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$.

1.3.5. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-1} = 1$.

1.3.6. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^2+7} = 0$.

1.3.7. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

1.3.8. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

1.3.9. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\left(x^2-1\right)^2} = \infty$.

1.3.10. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to 2} \frac{1}{\left(x^3-8\right)^2} = \infty$.

1.3.11. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^3} = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^3} = \infty$.

1.3.12. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \infty$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = -\infty$.

1.3.13. Υπολογισε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x\to -2} (5x^2 + 3x - 4)$. *Απ.* 10.
2. $\lim_{x\to 1} (x^2 + 2x + 12)$. *Απ.*15.
3. $\lim_{x\to 8} \sqrt{x^4}$. *Απ.*64.
4. $\lim_{x\to 3} \sqrt{5x^2 + 3x - 4}$. *Απ.* $\sqrt{50}$.
5. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+16}$. *Απ.* $\frac{12}{25}$.
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+12}{x^2+x}$. *Απ.*$\frac{15}{2}$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-9}{x+3}$. *Απ.* -2
8. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^6}$. *Απ.* *0*.
9. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^6}$. *Απ.*0.
10. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^6+1}$. *Απ.* 0.

1.3.14. Υπολογισε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6}$. *Απ.* 1.
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^3-1}$. *Απ.* $\frac{5}{3}$.
3. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4-x^4}{h}$. *Απ.* $4x^3$.
4. $\lim_{x\to 1} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. *Απ.* $-\frac{3}{\sqrt{6}-3}$.
5. $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. *Απ.* 6.

1.3.15. Υπολογισε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x\to 1^-} \frac{x-4}{x-1}$. *Απ.* ∞.
2. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-4}{x-1}$. *Απ.* $-\infty$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^3}$. *Απ.* ∞.
4. $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2+5}{x}$. *Απ.* $-\infty$.
5. $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x+5}{x^3}$. *Απ.* $-\infty$.

1.3.16. Υπολογισε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x+1}$. *Απ.* 1.

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{7x-1}$. *Απ.* $\frac{3}{7}$.

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{7x^2-1}$. *Απ.* 0.

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4}{7x-1}$. *Απ.* ∞.

5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4}{7x-1}$. *Απ.* $-\infty$.

1.3.17. Δείξε ότι η $f(x) = x^2 + 5x + 9$ είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

1.3.18. Δείξε ότι η $f(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+5}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

1.3.19. Δείξε ότι η $f(x) = |x+1|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

1.3.20. Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0, δείξε ότι η $f(x)\cdot g(x)$ είναι επίσης συνεχής στο x_0.

1.3.21. Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, δείξε ότι η $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι επίσης συνεχής στο x_0.

1.3.22. Βρες τα σημεία ασυνέχειας της $f(x) = \frac{1}{x-2}$. *Απ.* 2.

1.3.23. Βρες τα σημεία ασυνέχειας της $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. *Απ.* $-1, 1$.

1.3.24. Βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$. *Απ.* $-2, 2$.

1.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

1.4.1. Δώσε αυστηρούς ορισμούς των $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

1.4.2. Αποδειξε βάσει του ορισμού οτι $\lim_{x\to x_0}(kf(x)) = k\lim_{x\to x_0} kf(x)$.

1.4.3. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim_{x\to x_0} g(x))$ (όταν όλα τα όρια υπάρχουν).

1.4.4. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ (όταν όλα τα όρια υπάρχουν και $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

1.4.5. Αποδειξε οτι: αν για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \infty$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \infty$.

1.4.6. Αποδειξε οτι: αν για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \infty$.

1.4.7. Αποδειξε ότι: αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0, το ίδιο ισχύει και για τις $kf(x)$, $f(x)\cdot g(x)$.

1.4.8. Αποδειξε ότι: καθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.

1.4.9. Αποδειξε ότι: αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 και η $g(x)$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g(f(x))$ είναι συνεχής στο x_0.

1.4.10. Αποδειξε το Θεωρημα Ενδιαμεσης Τιμης: αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε για κάθε αριθμό c ο οποίος βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, υπάρχει $x \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$.

1.4.11. Αποδειξε ότι : αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι *φραγμένη* στο διάστημα $[a, b]$, δηλ. υπάρχουν αριθμοί $m, M \in \mathbb{R}^*$ τέτοιοι ώστε

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M.$$

Υπόδειξη: *https : //en.wikipedia.org/wiki/Bolzano_Weierstrass_theorem*.

1.4.12. Αποδειξε ότι : αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και συμβολίσουμε με m το μέγιστο κάτω φράγμα των τιμών που παίρνει η $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ και με M το ελάχιστο άνω φράγμα των τιμών που παίρνει η $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε για κάθε $c \in [m, M]$, υπάρχει $x \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$.

Υπόδειξη: Προηγουμενη και *https : //en.wikipedia.org/wiki/Completeness_(order_theory)*.

1.4.13. Αποδειξε ότι : αν στο διάστημα $[a, b]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και αυστηρά μονότονη, τότε (στο διάστημα $[a, b]$) η *αντίστροφη συνάρτηση* $f^{-1}(x)$ είναι καλώς ορισμένη και αυστηρά μονότονη.

1.4.14. Αποδειξε ότι: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1.4.15. Αποδειξε ότι το $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ υπάρχει.

1.4.16 (Dirichlet). Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Αποδειξε ότι: η $f(x)$ είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}$.

1.4.17 (Apostol). Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Αποδειξε ότι: η $g(x)$ είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής στο $(0, 1]$.

1.4.18 (Apostol). Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Αποδειξε ότι: η $g(x)$ είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$ και συνεχής στο 0.

1.4.19 (Apostol). Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{όταν} \quad x = \frac{m}{n} \text{ σε ανάγωγη μορφή} \\ 0 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 0 & \text{όταν} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Αποδειξε ότι: η $h(x)$ είναι συνεχής στο σύνολο των άρρητων αριθμών του $(0, 1]$ και ασυνεχής στο σύνολο των ρητών αριθμών του $(0, 1]$.

1.4.20 (Apostol). Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Αποδειξε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 1$ και ασυνεχής στο $[0, 1)$.

1.4.21. Αποδειξε ότι η εξίσωση $x^5 - 18x + 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μιά ρίζα στο $[-1, 1]$.

1.4.22. Αποδειξε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $a_0 + a_1 x + ... + a_{2n+1} x^{2n+1} = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

1.4.23 (Apostol). Έστω συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 και $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Αποδειξε ότι υπάρχει σταθερά a τέτοια ώστε $f(x) = ax$.

1.4.24 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\forall x, y > 1 : f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

Απ. $f(x) = ax \ln x$.

1.4.25 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\forall x : 2f(2x) = f(x) + x.$$

Απ. $f(x) = \frac{x}{3}$.

1.4.26 (Apostol). Δώσε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 1)$ και απεικονίζει το $(0, 1)$ στο $(0, 1]$. Ή, αποδείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

1.4.27. Αποδειξε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{2n+1} x^{2n+1}$, όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, ..., a_{2n+1}$ είναι θετικοί, έχει αντίστροφη συνάρτηση..

1.4.28 (Apostol). Δώσε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και απεικονίζει το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Q}$. Ή, αποδείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

1.4.29. Αποδειξε ότι: αν η $f(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b), τότε θα είναι φραγμένη. Δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν η $f(x)$ είναι απλά συνεχής στο (a, b).

1.4.30. Αν δεν υπαρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ τοτε δεν υπαρχει ουτε το $\lim_{x \to x_0} |f(x)|$. Σωστο ή λαθος;

1.4.31. Αν δεν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και το $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τοτε δεν υπαρχει ουτε το $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$. Σωστο ή λαθος;

1.4.32. Αν υπαρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τοτε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Σωστο ή λαθος;

1.4.33. Αν υπαρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ τοτε $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$ ή $-\infty$. Σωστο ή λαθος;

1.4.34. Αν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ αλλα οχι το $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τοτε δεν υπαρχει και το $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$. Σωστο ή λαθος;

1.4.35. Αν η $g(x) = (f(x))^2$ ειναι συνεχης στο x_0, τοτε και η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.36. Αν η $g(x) = (f(x))^2$ ειναι συνεχης στο $[a, b]$, τοτε και η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a, b]$. Σωστο ή λαθος;

1.4.37. Αν $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x-h)) = 0$, τοτε η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.38. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης και η $g(x)$ ειναι ασυνεχης στο x_0, τοτε και η $f(x)+g(x)$ ειναι ασυνεχεις στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.39. Αν η $f(x)$ και η $g(x)$ ειναι ασυνεχεις στο x_0, τοτε και η $f(x)+g(x)$ ειναι ασυνεχεις στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.40. Υπαρχει συναρτηση $f(x)$ με πεδιο ορισμου το $\mathbb{R}$ η οποια ειναι ασυνεχης σε ολο το $\mathbb{R}$. Σωστο ή λαθος;

1.4.41. Υπαρχει συναρτηση $f(x)$ με απειρα σημεια ασυνεχειας και απειρα σημεια συνεχειας. Σωστο ή λαθος;

1.4.42. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στα διαστηματα $[a, b]$ και $[c, d]$, τοτε ειναι συνεχης και στο $[a, b] \cup [c, d]$. Σωστο ή λαθος;

Κεφάλαιο 2

Παραγωγος

Η παραγωγος της συναρτησης $f(x)$ ειναι ο *στιγμιαιος* ρυθμος μεταβολης της f οταν μεταβαλλεται το x.

2.1 Θεωρια και Παραδειγματα

2.1.1. Ορισμος: Η *παράγωγος* μιας συνάρτησης $f(x)$ συμβολίζεται με $f'(x)$ και ορίζεται ως εξής

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Αν το όριο της (2.1) υπάρχει, λέμε ότι η $f(x)$ είναι *παραγωγίσιμη* στο x.

2.1.2. Ασκηση: Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = x$ βάσει του ορισμού.
Λυση.

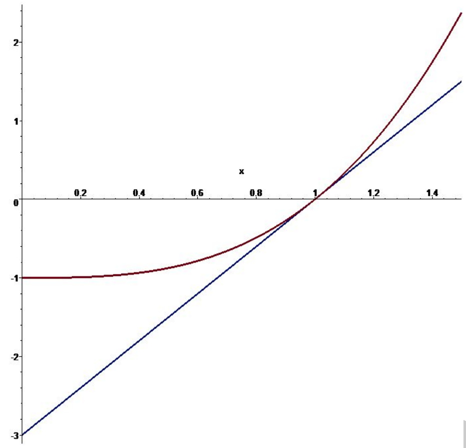
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

2.1.3. Ασκηση: Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = x^2$ βάσει του ορισμού.
Λυση.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

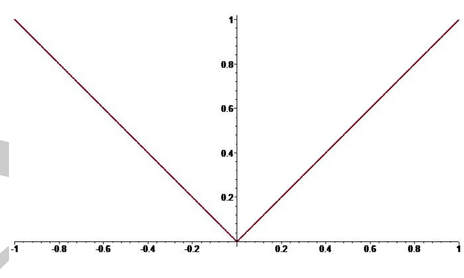
2.1.4. Παρατηρηση: Εάν παραστήσουμε γραφικά μια συνάρτηση $f(x)$ με μία καμπύλη C, όπως στο Σχήμα 2.1, τότε η παράγωγος $f'(x)$ δίνει την κλίση της ευθείας η οποία εφάπτεται στην

C στο σημείο x.



Σχ.2.1: Η $f'(x_0)$ ειναι η κλιση της εφαπτομενης στην καμπυλη $f(x)$, στο x_0.

1. **Παρατηρηση**: Υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες η $f(x)$ *δεν* έχει εφαπτομένη σε κάποιο σημείο x_0, όπως στο Σχήμα 2.2. Σε τέτοια περίπτωση, η $f(x)$ *δεν* έχει ούτε παράγωγο $f'(x)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2, όπου έχουμε $\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\neq \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$



Σχ.2.2: Η συναρτηση δεν εχει παραγωγο στο σημειο $x_0 = 0$.

2.1.5. Ασκηση: Αποδειξε, βάσει του ορισμού, ότι η

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{όταν} \quad x\geq 0\\ x & \text{όταν} \quad x<0\end{cases}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
Λυση. Θα πρέπει να είναι

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}.$$

Αλλά

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

και

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$

Άρα δεν υπάρχει η $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$.

2.1.6. Ορισμος: Η *δεύτερη παράγωγος* μιας συνάρτησης $f(x)$ συμβολίζεται με $f''(x)$ και ορίζεται ως εξής $f''(x) = (f'(x))'$. Η *παράγωγος n-στής τάξης* μιας συνάρτησης $f(x)$ (για $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) συμβολίζεται με $f^{(n)}(x)$ και ορίζεται ως εξής: για $n = 0$: $f^{(0)}(x) = f(x)$· για $n = 1, 2, 3, ..$: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. Δηλαδή η $f^{(n)}(x)$ είναι η παράγωγος της $f^{(n-1)}(x)$.

2.1.7. Θεωρημα: Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει υποχρεωτικά.

2.1.8. Θεωρημα: Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, αν $f(x) = x^a$, τότε $f'(x) = ax^{a-1}$.

2.1.9. Θεωρημα: Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ έχουν παραγώγους $f'(x)$ και $g'(x)$ αντίστοιχα, τότε ισχύουν τα παρακάτω.

$$\begin{aligned}
(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x)\cdot \\
(c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x), \qquad \text{όπου } c \text{ μιά σταθερά}\cdot \\
(f(x) \cdot g(x))' &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)\cdot \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)}{g^2(x)}, \qquad \text{όταν } g(x) \neq 0\cdot \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x), \qquad \text{όταν η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } g(x).
\end{aligned}$$

2.1.10. Ασκηση: Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
Λυση. $(x^2 - 4x + 5)' = (x^2)' - 4(x)' + (5)' = 2x - 4 + 0 = 2x - 4$.

2.1.11. Ασκηση: Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1)$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^2 - 4x + 5\right)'\left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 - 4x + 5\right)\left(x^2 + 1\right)' \\
&= (2x - 4)\left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 - 4x + 5\right)2x \\
&= 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4.
\end{aligned}$$

2.1.12. Ασκηση: Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}\right)' &= \frac{(x^2 - 4x + 5)'(x^2 + 1) - (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(2x - 4)(x^2 + 1) - (x^2 - 4x + 5)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 4}{(x^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

2.1.13. Ασκηση: Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Λυση. Εχουμε

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2.1.14. Ασκηση: Υπολογισε την δεύτερη παράγωγο της $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2+1}\right)'\right)'$$
$$= \left(\frac{4x^2-8x-4}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{8(-x^3+3x^2+3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

2.1.15. Θεωρημα: Αν $g(x) = f^{-1}(x)$ (δηλ.η $g(x)$ είναι η *αντίστροφη συνάρτηση* της f), τότε $g'(x) = 1/f'(x)$.

2.1.16. Συμβολισμος: Η παράγωγος της $f(x)$ συμβολίζεται και ως

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

όπου

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

είναι η *μεταβολή* της f όταν το x μεταβάλλεται κατά Δx.

2.1.17. Παρατηρηση: Ισχύει *προσεγγιστικά* ότι $f'(x) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x}$ και

$$\Delta f \simeq f'(x)\Delta x. \tag{2.2}$$

Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο μικρότερο είναι το $|\Delta x|$.

2.1.18. Παρατηρηση: Ο συμβολισμός $\frac{df}{dx}$ τονίζει ότι η παράγωγος είναι ο *λόγος* της μεταβολής Δf ως προς την μεταβολή Δx όταν τα Δx και Δf γίνονται πολύ μικρά. Αν και το σύμβολο $\frac{df}{dx}$ *δεν* είναι κλάσμα, πολλές φορές το μεταχειριζόμαστε ως τέτοιο· π.χ. γράφουμε

$$df = f'(x)\,dx. \tag{2.3}$$

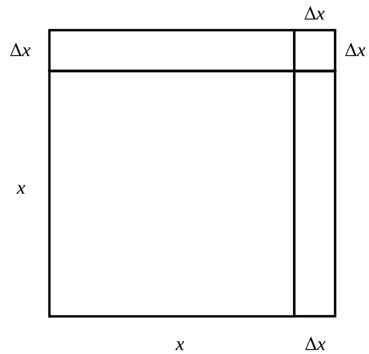
2.1.19. Ορισμος: Η ποσότητα df στην (2.3) ονομάζεται *διαφορικό* της $f(x)$.

2.1.20. Παρατηρηση: Στην ουσία η (2.3) είναι μια συντομογραφία της έκφρασης «η Δf είναι *περίπου* ίση με την $f'(x)\Delta x$ όταν το $|\Delta x|$ είναι *αρκετά μικρό*». Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, ο συμβολισμός $df = f'(x)\,dx$ είναι πολύ χρήσιμος (π.χ., στον υπολογισμό *ολοκληρωμάτων*) και γενικά μπορούμε να χειριζόμαστε το $\frac{df}{dx}$ ως κλάσμα· αν και αυτό δεν είναι αυστηρά σωστό δινει τα σωστα αποτελεσματα.

2.1.21. Ασκηση: Υπολογισε το διαφορικο της $f(x) = x^2$ βασει του ορισμου και δωστε μια γεωμετρικη ερμηνεια.
Λυση. Εχουμε

$$df = f'(x)\,dx = 2xdx.$$

Μια γεωμετρικη ερμηνεια ειναι η εξης. Θεωρησε ενα τετραγωνο με πλευρα x. Τοτε $f(x) = x^2$ ειναι το εμβαδον του τετραγωνου. Εστω τωρα οτι η πλευρα αυξανεται απο x σε $x+\Delta x$. Το εμβαδον αυξανεται οπως φαινεται στο Σχημα 2.3.



Σχ.2.3: Γεωμετρικη ερμηνεια του διαφορικου.

Αν το Δx ειναι σχετικα μικρο, η μεγαλυτερη μεταβολη του εμβαδου δινεται απο τα δυο παραλληλογραμα με πλευρες x και Δx και ειναι $2x\Delta x$. Υπαρχει μια επιπλεον αυξηση του εμβαδου κατα $(\Delta x)^2$ απο το τετραγωνο με πλευρα Δx, αλλα αν το Δx ειναι μικρο, τοτε το $(\Delta x)^2$ ειναι πολυ μικρο σε σχεση με το $2x\Delta x$ και μπορουμε να το αγνοησουμε. Π.χ., αν $x = 2$ και $\Delta x = 0.1$, τοτε

$$\begin{aligned}(x + \Delta x)^2 &= 2.1^2 = 4.41, \qquad x^2 = 2^2 = 4,\\ (x + \Delta x)^2 - x^2 &= 4.41 - 4 = 0.41,\\ 2x\Delta x &= 2 \cdot 2 \cdot 0.1 = 0.4,\\ (\Delta x)^2 &= (0.1)^2 = 0.01,\end{aligned}$$

δηλ. το μεγαλυτερο μερος της μεταβολης $\Delta f = 0.41$ προκυπτει απο τον ορο $2x\Delta x = 0.4$.

2.1.22. Ασκηση: Βρες προσεγγιστικα την τιμη της $\sqrt{4.1}$ χρησιμοποιωντας το διαφορικο.
Λυση. Θετουμε $f(x) = \sqrt{x}$. Τοτε

$$\sqrt{x + \Delta x} = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Αν παρουμε τωρα $x = 4$, $x + \Delta x = 4.1$ και αρα $\Delta x = 0.1$, η παραπανω σχεση δινει

$$\sqrt{4.1} = \sqrt{4 + 0.1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0.1 = 2 + \frac{0.1}{4} = 2.025.$$

Η πραγματικη τιμη ειναι $\sqrt{4.1} = 2.0248$. Το *σχετικο* σφαλμα ειναι

$$\frac{|2.0248 - 2.025|}{2.048} = 9.7656 \times 10^{-5}$$

Αρα η προσεγγιση ειναι αρκετα καλη.

2.1.23. Παρατηρηση: Μερικες φορες μια συναρτηση $y(x)$ οριζεται σε *πλεγμενη μορφη*, απο μια εκφραση $P(x,y)=0$. Η εκφραση αυτη καθοριζει οτι οι x και y βρισκονται σε καποια (συναρτησιακη) σχεση, αλλα ισως δεν μπορουμε να λυσουμε $P(x,y)=0$ και να βρουμε την $y(x)$ ως συναρτηση του x. Παρολα αυτα, πολλες φορες ειναι δυνατο να υπολογισουμε την $y'(x)$ ως συναρτηση των x και y.

2.1.24. Ασκηση: Βρες την y' αν $y^3+y^2-5y-x^2+4=0$.
Λυση Θεωρησε την συνθετη συναρτηση $g(x)=g(y(x))=(y(x))^3$, δηλ. $g(y)=y^3$. Τοτε

$$\frac{dg}{dx}=\frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx}=3y^2y'. \tag{2.4}$$

Αντιστοιχα,

$$\frac{d}{dx}y^2=2yy'. \tag{2.5}$$

Χρησιμοποιωντας τις (2.4) και (2.5) εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(y^3+y^2-5y-x^2+4\right)=\frac{d}{dx}(0)\Rightarrow\\ 3y^2y'+2yy'-5y'-2x+0=0\Rightarrow\\ y'\cdot\left(3y^2+2y-5\right)=2x\Rightarrow\\ y'=\frac{2x}{3y^2+2y-5}.\end{aligned}$$

2.1.25. Ορισμος: Λέμε ότι η $f(x)$ ειναι *αυξουσα* (αντ. *φθινουσα*) στο (a,b) ανν για καθε $x_1,x_2\in(a,b)$ ισχυει: $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ (αντ. $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$). Αν το $\leq$ (αντ. $\geq$) αντικατασταθει με $<$ (αντ. $>$) λεμε οτι η $f(x)$ ειναι *γνησιως* αυξουσα (αντ. φθινουσα). Αντιστοιχοι ορισμοι ισχυουν και για το κλειστο διαστημα $[a,b]$.

2.1.26. Ασκηση: Βρες τα διαστηματα στα οποια η $f(x)=x^3-x$ ειναι αυξουσα και φθινουσα.
Λυση. Εχουμε $f'(x)=3x^2-1$. Λυνοντας $3x^2-1>0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $A=\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως αυξουσα στο A. Παρομοια, λυνοντας $3x^2-1<0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $B=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως φθινουσα στο A.

2.1.27. Θεωρημα: Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο (a,b) και στο $x_0\in(a,b)$ έχουμε $0<f'(x_0)\in\mathbb{R}^*$ (προσέξτε ότι το $f'(x_0)$ μπορεί να είναι ∞). Τότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, δηλ. ισχύει

$$x<x_0\Rightarrow f(x)<f(x_0)\text{ και }x_0<x\Rightarrow f(x_0)<f(x).$$

Αντίστοιχα, αν στο $x_0\in(a,b)$ έχουμε $0>f'(x_0)\in\mathbb{R}^*$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, δηλ. ισχύει

$$x<x_0\Rightarrow f(x)>f(x_0)\text{ και }x_0<x\Rightarrow f(x_0)>f(x).$$

2.1.28. Ορισμος: Λέμε ότι η $f(x)$ ειναι *κυρτη* στο (a,b) ανν για καθε $x_1,x_2\in(a,b)$ και $\kappa\in[0,1]$ ισχυει:

$$f(\kappa x_1+(1-\kappa)x_2)\leq\kappa f(x_1)+(1-\kappa)f(x_2)$$

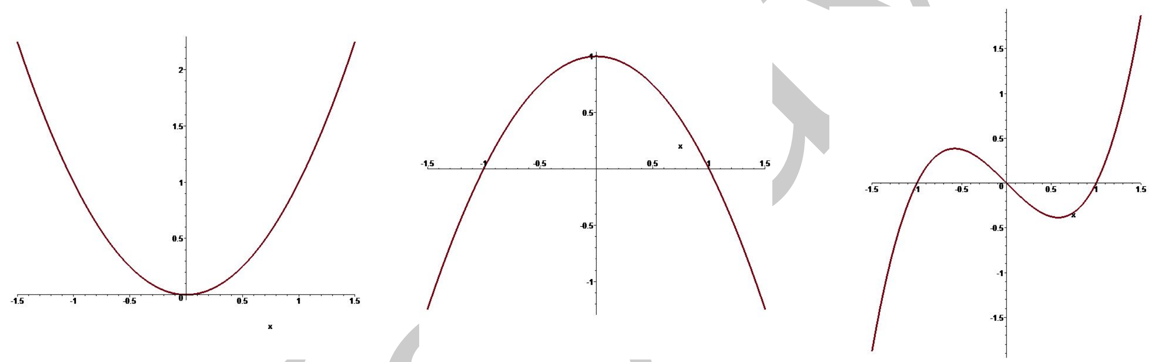
Λέμε ότι η $f(x)$ ειναι *κοιλη* στο (a,b) ανν για καθε $x_1,x_2\in(a,b)$ και $\kappa\in[0,1]$ ισχυει:

$$f(\kappa x_1+(1-\kappa)x_2)\geq\kappa f(x_1)+(1-\kappa)f(x_2)$$

2.1.29. Θεωρημα: Εστω $f(x)$ δις διαφορισιμη στο (a, b). Τοτε

1. Η $f(x)$ ειναι *κυρτη* στο (a, b) ανν $f''(x) \geq 0$ για καθε $x \in (a, b)$.
2. Η $f(x)$ ειναι *κοιλη* στο (a, b) ανν $f''(x) \leq 0$ για καθε $x \in (a, b)$.

2.1.30. Παραδειγμα: Η $f(x) = x^2$ εχει $f''(x) = 2 > 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$ αρα ειναι κυρτη στο $(-\infty, \infty)$. Η $g(x) = 1 - x^2$ εχει $g''(x) = -2 < 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$ αρα ειναι κυρτη στο $(-\infty, \infty)$. Η $h(x) = x^3 - x$ εχει $h''(x) = 6x$, αρα ειναι κοιλη για $x < 0$ και κυρτη για $x > 0$. Οι γραφικες παραστασεις των συναρτησεων στο Σχημα 2.4 δινουν την *οπτικη* σημασια της κυρτοτητας και κοιλοτητας.



Σχ.2.4: Κυρτες και κοιλες συναρτησεις.

2.1.31. Ασκηση: Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. *Λυση*. Εχουμε $f''(x) = 6x - 12$. Αρα η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτη στο $(2, \infty)$.

2.1.32. Θεωρημα: (Rolle): Αν (α) η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και (β) $f(a) = f(b) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

2.1.33. Παραδειγμα: Η συναρτηση $f(x) = x^2 - 1$ ειναι συνεχης και παραγωγισιμη στο $(-1, 1)$ και $f(-1) = f(1) = 0$. Παρατηρουμε οτι υπαρχει $x_0 = 0 \in (-1, 1)$ τετοιο ωστε $f'(x_0) = 2x_0 = 0$.

2.1.34. Θεωρημα: **(Μέσης Τιμής)**: Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2.1.35. Παραδειγμα: Η συναρτηση $f(x) = x^2 - 1$ ειναι συνεχης και παραγωγισιμη στο $(-1, 2)$ και $f(-1) = 0$, $f(2) = 3$. Παρατηρουμε οτι υπαρχει $x_0 = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$ τετοιο ωστε $f'(x_0) = 2x_0 = 1 = \frac{3-0}{2-(-1)}$.

2.1.36. Θεωρημα: Αν στο διάστημα $[a, b]$ ισχύει $f'(x) = 0$, τότε η $f(x)$ είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ (στο διάστημα $[a, b]$).

2.1.37. Θεωρημα: **(Cauchy)**: Αν οι $f(x), g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b), τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

2.1.38. Παραδειγμα: Οι συναρτησεις $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2$ ειναι συνεχεις και παραγωγισιμες στο $(-1, 2)$. Εχουμε

$$f(-1) = 0, \quad f(2) = 3,$$
$$g(-1) = 1, \quad g(2) = 4,$$
$$\frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)} = \frac{3-0}{4-1} = 1.$$

Επιπλεον $f'(x) = 2x = g'(x)$. Παρατηρουμε οτι υπαρχει $x_0 = 1 \in (-1, 2)$ τετοιο ωστε

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)}.$$

Στην πραγματικοτητα εδω εχουμε

$$\forall x_0 \in (-1, 2) : \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = 1 = \frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)}.$$

2.1.39. Ορισμος: Λέμε ότι το x_0 ειναι ενα *στασιμο σημειο* της $f(x)$ ανν $f'(x_0) = 0$.

2.1.40. Ορισμος: Λέμε ότι το x_0 ειναι ενα *σημειο καμπης* της $f(x)$ ανν $f''(x_0) = 0$.

2.1.41. Ορισμος: Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει *τοπικό μέγιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Αντιστοιχα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει *τοπικό ελάχιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Και στις δυο περιπτωσεις (τοπικο μεγιστο και τοπικο ελαχιστο) λεμε οτι η $f(x)$ εχει *τοπικο ακροτατο* στο x_0.

2.1.42. Θεωρημα: Αν η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο (a, b) και έχει *τοπικό μέγιστο* ή *τοπικο ελαχιστο* στο $x_0 \in (a, b)$ τοτε $f'(x_0) = 0$.

2.1.43. Θεωρημα: Αν η $f(x)$ ειναι δις παραγωγισιμη στο (a, b) τοτε

1. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, η $f(x)$ εχει τοπικο ελαχιστο στο x_0.
2. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, η $f(x)$ εχει τοπικο μεγιστο στο x_0.

2.1.44. Ασκηση: Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = x^3 - x$.
Λυση. Σε καθε τοπικο μεγιστο ή ελαχιστο θα εχουμε $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ οποτε εχουμε δυο στασιμα σημεια (υποψηφια για τοπικο ακροτατο) τα $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Αφου $f''(x) = 6x$ και $f''(x_1) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, στο x_1 εχουμε τοπικο ελαχιστο. Αντιστοιχα, αφου $f''(x_2) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$, στο x_2 εχουμε τοπικο μεγιστο.

2.1.45. Θεωρημα: (Κανόνας *L'Hospital***)**: Έστω συναρτήσεις $f(x), g(x)$, διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$. Θέτουμε

$$\widehat{(a, b)} = (a, b) - x_0,$$

δηλαδή το $\widehat{(a, b)}$ είναι όλο το (a, b) εκτός του x_0. Αν (α) οι $f(x), g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\widehat{(a, b)}$, (β) $g'(x) \neq 0$ στο $\widehat{(a, b)}$ και (γ) το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπαρχει, τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2.1.46. Ασκηση: Βρες τα όρια (α) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^8}$, (β) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x+x^8}$, (γ) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3+x^8}$.

Λυση. Και στις τρεις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τον κανόνα *L'Hospital*. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^8} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(x+x^8)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+8x^7} = 1. \\
\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x+x^8} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(x+x^8)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+8x^7} = 0. \\
\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3+x^8} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(x^3+x^8)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^2+8x^7} = \infty.
\end{aligned}$$

2.2 Λυμενα Προβληματα

2.2.1. Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = x^3$ βάσει του ορισμού.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2.
\end{aligned}$$

2.2.2. Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = \frac{1}{x}$ βάσει του ορισμού.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\frac{\Delta x}{x^2}\frac{\Delta x+2x}{(a+x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \frac{\Delta x + 2x}{(\Delta x + x)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{x^2} \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{\Delta x + 2x}{(\Delta x + x)^2} \right) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

2.2.3. Αποδειξε, βάσει του ορισμού, ότι η $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{όταν} \quad x \geq 1 \\ -1 & \text{όταν} \quad x < 1 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
Λυση. Θα πρέπει να είναι

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}.$$

Αλλά

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1-1}{\Delta x} = 0$$

και

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-1-1}{\Delta x} = \infty.$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(1)$.

2.2.4. Αποδειξε ότι, αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0. Δώστε ένα αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.
Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta x \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow \\
\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0) + \Delta x \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) \Rightarrow \\
\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) \Rightarrow \\
\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0)
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0. Δωσε ενα τετοιο παραδειγμα.

2.2.5. Αποδειξε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $f(x) = x^n$, τότε $f'(x) = nx^{n-1}$.
Λυση. Η απόδειξη είναι επαγωγική. Για $n = 1$ έχουμε $(x)' = 1 = n \cdot x^{n-1}$. Έστω ότι για $n = 1, 2, ..., k$ ισχύει $(x^n)' = nx^{n-1}$. Τώρα θα εξετάσουμε την $f(x) = x^{k+1}$:

$$\left(x^{k+1}\right)' = \left(x^k \cdot x\right)' = \left(x^k\right)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1}x + x^k = (k+1)\, x^k.$$

2.2.6. Αποδειξε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $f(x) = \frac{1}{x^n}$, τότε $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.
Λυση. Η απόδειξη είναι επαγωγική. Για $n = 1$ έχουμε $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ και ο τύπος επαληθεύεται. Έστω ότι για $n = 1, 2, ..., k$ ισχύει $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$. Τώρα θα εξετάσουμε την $f(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' &= \left(\frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' \\
&= -\frac{k}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}
\end{aligned}$$

και άρα η υπόθεση επαληθεύεται. *Παρατηρείστε ότι μπορούμε να γράψουμε* $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ *και έτσι ο παραπάνω τύπος μπορεί να* ενοποιηθεί *με τον αυτόν του προηγούμενου προβλήματος και να γράψουμε*

$$\forall n \in \mathbb{Z} : (x^n)' = nx^{n-1}.$$

2.2.7. Αποδειξε, βάσει του ορισμού, ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
Λυση. Εχουμε

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot f(x+\Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x).$$

2.2.8. Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = x^2 + x^3 + 5$.
Λυση. $(x^2 + x^3 + 5)' = (x^2)' + (x^3)' + (5)' = 2x + 3x^2 + 0 = 2x + 3x^2$.

2.2.9. Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + 1)$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 + x + 2\right)' \left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 + x + 2\right)\left(x^2 + 1\right)' \\ &= (2x+1)\left(x^2+1\right) + \left(x^2 + x + 2\right)2x \\ &= 4x^3 + 3x^2 + 6x + 1. \end{aligned}$$

2.2.10. Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)' &= \frac{(x^2+x+1)'(x^2+1) - (x^2+x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(x^2+1) - (x^2+x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

2.2.11. Υπολογισε την δεύτερη παράγωγο της $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \left(\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'\right)' \\ &= \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

2.2.12. Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ υπολογισε την n-στης τάξης παράγωγο $f^{(n)}(x)$ όταν $f(x) = \frac{1}{x}$.
Λυση. Εχουμε

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)'' = \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)''' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}.$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας δίνουν την ιδέα ότι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

και ο τύπος ισχύει για $n = 0, 1, 2, 3$. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $n = 0, 1, \ldots, k$. Τώρα

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' &= \left((-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}\right)' = (-1)^k k! \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^k k! \left(-\frac{k+1}{x^{k+2}}\right) = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

και άρα η υπόθεση επαληθεύεται.

2.2.13. Υπολογισε το διαφορικο της $f(x) = x^3$ βασει του ορισμου.
Λυση

$$df = f'(x)\,dx = 3x^2 dx.$$

2.2.14. Βρες προσεγγιστικά την τιμή $\sqrt{4.01}$ χρησιμοποιώντας το διαφορικό.
Λυση Παιρνουμε $x = 4$, $x + \Delta x = 4.01$ και αρα $\Delta x = 0.01$, οποτε

$$\sqrt{4.01} = \sqrt{4 + 0.01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} 0.01 = 2 + \frac{0.01}{4} = 2.0025.$$

Η πραγματικη τιμη ειναι $\sqrt{4.01} = 2.002498439$. Το σχετικο σφαλμα ειναι

$$\frac{|2.002498439 - 2.0025|}{2.002498439} = 7.7953 \times 10^{-7}$$

δηλ. δυο ταξεις μεγεθους μικροτερο απο το σφαλμα στον υπολογισμο της $\sqrt{4.1}$. Αυτο δειχνει οτι οσο μικροτερο γινεται το Δx, τοσο καλυτερη ειναι η προσεγγιση με διαφορικο.

2.2.15. Βρες την y' αν $(x^2 + y^2)\,x^2 = y^2$.
Λυση Εχουμε

$$\begin{aligned}(2x + 2yy')\,x^2 + \left(x^2 + y^2\right) 2x = 2yy' &\Rightarrow \\ y' \cdot \left(2yx^2 - 2y\right) = -2x^3 - \left(x^2 + y^2\right) \cdot 2x &\Rightarrow \\ y' = \frac{2x^3 + 2x \cdot (x^2 + y^2)}{2y \cdot (x^2 - 1)} &= \frac{x \cdot (2x^2 + y^2)}{y \cdot (x^2 - 1)}.\end{aligned}$$

2.2.16. Βρες την $y'(3)$ αν $3 \cdot (x^2 + y^2)^2 = 100xy$.
Λυση Λυνοντας οπως και στην προηγουμενη παιρνουμε

$$y' = \frac{25y - 3x \cdot (x^2 + y^2)}{-25x + 3y \cdot (x^2 + y^2)}. \tag{2.6}$$

Εδω ζητειται η τιμη $y'(3)$. Δηλ. στην (2.6) θα θεσουμε $x = 3$. Ποια ειναι ομως η τιμη $y(3)$; Στην αρχικη $3 \cdot (x^2 + y^2)^2 = 100xy$ θετουμε $x = 3$ και παιρνουμε

$$3 \cdot \left(3^2 + y^2\right)^2 = 100 \cdot 3 \cdot y$$

και λυνουμε ως προς y. Μια λυση ειναι $y = 1$. Οποτε στο σημειο $(3, 1)$ εχουμε

$$y'(3) = \frac{25 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 1^2)}{-25 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 1^2)} = \frac{13}{9}. \tag{2.7}$$

2.2.17. Βρες την y'' αν $x^2 + y^2 = 25$.
Λυση. Οπως και στις προηγουμενες ασκησεις, εδω εχουμε

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Παραγωγιζουμε και παλι και παιρνουμε

$$y'' = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{(x)'\,y - xy'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}.$$

2.2.18. Βρες τα διαστηματα στα οποια η $f(x) = x^2 - 3x + 4$ ειναι αυξουσα και φθινουσα.
Λυση. Εχουμε $f'(x) = 2x - 3$. Λυνοντας $2x - 3 > 0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $A = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως αυξουσα στο A. Παρομοια, λυνοντας $2x - 3 < 0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $B = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως φθινουσα στο A.

2.2.19. Βρες τα διαστηματα στα οποια η $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ ειναι αυξουσα και φθινουσα.
Λυση. Εχουμε $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$. Αρα $f'(x) < 0$ για καθε $x \in A = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ και η $f(x)$ ειναι γνησιως φθινουσα στο A.

2.2.20. Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$.
Λυση. Εχουμε $f''(x) = 6x - 12$. Αρα η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτη στο $(2, \infty)$.

2.2.21. Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.
Λυση. Εχουμε $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$. Αρα η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτη στο $(2, \infty)$.

2.2.22. Αποδειξε το Θεώρημα του *Rolle***:** αν (α) η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, (β) παραγωγίσιμη στο (a, b) και (γ) $f(a) = f(b) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
Λυση. Αν η $f(x)$ ισουται με 0 στο (a, b), τοτε $f'(x) = 0$ για καθε $x \in (a, b)$. Εστω λοιπον οτι υπαρχουν σημεια x τετοια ωστε $f(x) \neq 0$. Εστω π.χ. οτι υπαρχουν σημεια x τετοια ωστε $f(x) > 0$. Επειδη η $f(x)$ ειναι συνεχης, θα υπαρχει x_0 στο οποιο η $f(x)$ εχει μεγιστη τιμη $f(x_0) > 0$ και αυτη θα ειναι *και* τοπικο μεγιστο (γιατι;)· αρα $f'(x_0) = 0$. Με ομοιο συλογισμο, αν υπαρχουν σημεια x τετοια ωστε $f(x) < 0$, τοτε σε καποιο σημειο x_0 θα εχουμε $f'(x_0) = 0$. Σε καθε περιπτωση (ειτε με $f(x) < 0$ ειτε με $f(x) > 0$) υπαρχει $x_0 \in (a, b)$ τετοιο ωστε $f'(x_0) = 0$.

2.2.23. Αποδειξε το Θεώρημα Μέσης Τιμής**.**
Λυση. Αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα του *Rolle* στην συνάρτηση

$$h(x) = f(x)(b - a) - x(f(b) - f(a)) + f(b)a - bf(a).$$

2.2.24. Αποδειξε ότι: αν στο διάστημα $[a, b]$ ισχύει $f'(x) = 0$, τότε η $f(x)$ είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ (στο διάστημα $[a, b]$).
Λυση. Παίρνουμε τυχόν $x_0 \in (a, b)$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα της Μέσης Τιμής στην $f(x)$ και στο διάστημα $[a, x_0]$. Θα έχουμε κάποιο x_1 τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(x_0) = 0 \Rightarrow [\forall x_0 \in (a, b) : f(x_0) = f(a)].$$

Δηλαδή, $f(x) = f(a)$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(x) = f(b)$.

2.2.25. Αποδειξε : αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο (a, b) και έχει *τοπικό μέγιστο* ή *ελάχιστο* στο $x_0 \in (a, b)$ και υπάρχει η $f'(x_0)$, τοτε θα είναι $f'(x_0) = 0$.
Λυση. Θα δουλέψουμε με μια βοηθητική συνάρτηση

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{όταν} \quad x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{όταν} \quad x = x_0 \end{cases}.$$

Προφανώς $\lim_{x \to x_0} f^*(x) = f'(x_0) = f^*(x_0)$ και άρα η $f^*(x)$ είναι συνεχής στο x_0. Ας υποθέσουμε ότι $f^*(x_0) = f'(x_0) > 0$. Τότε. λόγω της συνέχειας υπάρχει δ τέτοιο ώστε

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow f^*(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

το οποίο αντίκειται στην υπόθεση ότι η $f(x)$ έχει είτε *τοπικό μέγιστο* είτε *ελάχιστο* στο x_0. Με αντίστοιχο τρόπο διαπιστώνουμε ότι δεν μπορεί να έχουμε $f^*(x_0) = f'(x) < 0$. Οπότε θα έχουμε $f^*(x_0) = f'(x_0) = 0$.

2.2.26. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$. $4x^3 - 6x = 0$.
Λυση. Σε καθε τοπικο μεγιστο ή ελαχιστο θα εχουμε $f'(x) = 4x^3 - 6x = 0$ οποτε εχουμε τρια στασιμα σημεια (υποψηφια για τοπικο ακροτατο) τα $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = 0$ και $x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Εχουμε επισης $f''(x) = 12x^2 - 6$. Τωρα, $f''(x_1) = f''(x_3) = 12 > 0$, αρα στα x_1, x_3 εχουμε τοπικο ελαχιστο. Επισης $f''(x_2) = -6 < 0$, αρα στο x_2 εχουμε τοπικο μεγιστο.

2.2.27. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x-1}$.
Λυση. Σε καθε τοπικο μεγιστο ή ελαχιστο θα εχουμε $f'(x) = x^2 \frac{2x-3}{(x-1)^2} = 0$ οποτε εχουμε δυο στασιμα σημεια τα $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$. Εχουμε επισης $f''(x) = \frac{2x\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^3}$. Τωρα, $f''(x_1) = \frac{3}{4} > 0$, αρα στο x_1 εχουμε τοπικο ελαχιστο. Επειδη $f''(x_2) = 0$, δεν μπορουμε να ξερουμε αν στο x_2 εχουμε μεγιστο ή ελαχιστο (ή κανενα εκ των δυο).

2.2.28. Βρες τα όρια (α) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x+x^2}$, (β) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^8}$.

Λυση. Χρησιμοποιουμε τον κανόνα *L'Hospital*. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{1+2x} = 0.$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+8x^7} = 1.$$

2.3 Αλυτα Προβληματα

2.3.1. Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = x^3$ βάσει του ορισμού. *Απ.* $3x^2$.

2.3.2. Υπολογισε την παράγωγο της $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ βάσει του ορισμού. *Απ.* $\frac{2}{(x+1)^2}$.

2.3.3. Αποδειξε, βάσει του ορισμού, ότι η $f(x) = |x-3|\,x^2$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

2.3.4. Σωστό ή λάθος: αν οι $f(x), g(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0, οι $f(x) \cdot g(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Δώσε παράδειγμα.
Απ. Λάθος· παρε $f(x) = g(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

2.3.5. Αποδειξε βάσει του ορισμού ότι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ έχει $f'(x) = 0$.

2.3.6. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $(x^{10})'$. *Απ.* $10x^9$.

2. $(x^3 - 4x + 1)'$. *Απ.* $3x^2 - 4$.

3. $\left(\frac{x^3-4x+1}{x^2}\right)'$. *Απ.* $\frac{x^3+4x-2}{x^3}$.

4. $\left(\frac{x^2+1}{2x-7}\right)'$. *Απ.* $\frac{x^2-7x-1}{(2x-7)^2}$.

2.3.7. Υπολογισε τις δευτερες παραγωγους

1. $\left(x^{10}\right)''$. *Απ.* $90x^8$.

2. $\left(x^3-4x+1\right)''$. $6x$.

3. $\left(\frac{x^3-4x+1}{x^2}\right)''$. *Απ.* $-\frac{2(4x-3)}{x^4}$.

4. $\left(\frac{x^2+1}{2x-7}\right)''$. *Απ.* $\frac{196}{(2x-7)^3}$.

2.3.8. Αποδειξε οτι για καθε $n\in\mathbb{Z}$ ισχυει $(x^n)=nx^{n-1}$.

2.3.9. Υπολογισε , για κάθε $n\in\mathbb{N}$, την n-στή παράγωγο της $f(x)=\frac{1}{1-x}$.
Απ. $n!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

2.3.10. Βρες τα σημεία στα οποία η $f(x)=x^{3/5}$ δεν είναι παραγωγίσιμη και δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία. *Απ.* $x_0=0$.

2.3.11. Υπολογισε τις παραγώγους

1. $\left(\sqrt{x^3+1}\right)'$. *Απ.* $\frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$. D_x

2. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}\right)'$. *Απ.* $-\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)^2}$.

3. $\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x}\right)'$. *Απ.* $\frac{\left(x\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2+1}\right)}{2x^2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+1}}$.

2.3.12. Έστω $y(x)=x^2$ και $x(y)=\sqrt{y}$. Αποδειξε ότι $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$.

2.3.13. Έστω $y(x)=\frac{x+1}{x-1}$ και $x(y)=\frac{y+1}{y-1}$. Αποδειξε ότι $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$.

2.3.14. Βρες προσεγγιστικά τις παρακατω τιμες χρησιμοποιώντας το διαφορικό.

1. $\frac{1}{0.9}$ *Απ.* $\frac{1}{0.9}\simeq 1.1$.

2. $\frac{1}{0.873}$. *Απ.* $\frac{1}{0.873}\simeq 1.127$.

3. $\cos(31^o)$. *Απ.* $\cos(31^o)\simeq 0.851$.

4. $\sqrt[5]{33}$. *Απ.* $\sqrt[5]{33}\simeq 2.0125$.

2.3.15. Βρες την y' για τις παρακάτω πεπλεγμένες συναρτήσεις.

1. $x^2+y^2=16$. *Απ.* $-x/y$.

2. $x^{1/2}+y^{1/2}=9$. *Απ.* $-\sqrt{y/x}$.

3. $x^3-xy+y^2=4$. *Απ.* $\frac{y-3x^2}{2y-x}$.

4. $x^3y^3 - y = x$. *Απ.* $\frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2-1}$.

5. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 = 38$. *Απ.* $\frac{4xy-3x^2-3y^2}{2x\cdot(3y-x)}$.

2.3.16. Βρες την y'' για τις παρακάτω πεπλεγμένες συναρτήσεις

1. $x^2 + xy = 5$. *Απ.* $10/x^3$.

2. $x^2 - y^2 = 16$. *Απ.* $-16/y^3$.

3. $y^2 = x^3$. *Απ.* $3x/4y$.

2.3.17. Βρες τα διαστηματα στα οποια η $f(x)$ ειναι αυξουσα και φθινουσα.

1. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

3. $f(x) = \frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$.

4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

2.3.18. Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x)$.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$.

2. $f(x) = (x+1)^4$.

3. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$.

2.3.19. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)$.

1. $f(x) = 1 - 4x - x^2$.

2. $f(x) = (x-3)x^2$.

3. $f(x) = \frac{x}{x^2-6x-16}$.

4. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

5. $f(x) = \frac{(x-2)(x-8)}{x^2}$.

2.3.20. Βρες τα όρια

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^6}{x^4+x^8}$. *Απ.* ∞.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^6}{x^4+x^8}$. *Απ.* 1.

3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^6-x^8}{x^4+x^{10}}$. *Απ.* 0.

2.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

2.4.1. Αποδειξε οτι $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

2.4.2. Αποδειξε οτι $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)}{g^2(x)}$ (όταν $g(x) \neq 0$).

2.4.3. Αποδειξε οτι $(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$.

2.4.4. Αποδειξε οτι $(f(g(x)))' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$.

2.4.5. Αποδειξε οτι: αν $g(x) = f^{-1}(x)$ (δηλ.η $g(x)$ είναι η *αντίστροφη συνάρτηση* της f), τότε $g'(x) = 1/f'(x)$.

2.4.6. Αποδειξε : αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο (a,b) και στο $x_0 \in (a,b)$ έχουμε $0 < f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ισχύει $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ και $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x)$.

2.4.7. Αποδειξε οτι:

$$(\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0) \Rightarrow (\text{η } f(x) \text{ ειναι αυξουσα στο } (a,b)).$$

2.4.8. Αποδειξε οτι:

$$(\forall x \in [a,b] : f'(x) = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in [a,b] : f(x) = c).$$

2.4.9. Αποδειξε το θεώρημα του *Cauchy*.

2.4.10. Αποδειξε τον κανόνα του *L'Hospital*.

2.4.11. Εστω $f(x)$ ειναι δις παραγωγισιμη στο (a,b). Αποδειξε οτι:

1. αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, η $f(x)$ εχει τοπικο ελαχιστο στο x_0·
2. αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, η $f(x)$ εχει τοπικο μεγιστο στο x_0.

2.4.12. Αποδειξε : αν η $f(x)$ ειναι δις διαφορισιμη στο (a,b) τοτε:

1. Η $f(x)$ ειναι κυρτη στο (a,b) ανν $f''(x) \geq 0$ για καθε $x \in (a,b)$.
2. Η $f(x)$ ειναι κοιλη στο (a,b) ανν $f''(x) \leq 0$ για καθε $x \in (a,b)$.

2.4.13. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ειναι συνεχης αλλα οχι παραγωγισιμη στο $x_0 = 2$.

2.4.14. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ειναι παραγωγισιμη στο $x_0 = 2$ αλλα η $f'(x)$ δεν ειναι συνεχης.

2.4.15. Έστω $f(x) = x^n$. Αποδειξε ότι

$$\frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}a + \frac{f''(1)}{2!}a^2 + \dots + + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}n^2 = (1+a)^n.$$

2.4.16. Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αποδειξε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

2.4.17. Έστω $f(x), g(x)$ συναρτήσεις συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Έστω επίσης ότι οι $g(x), g'(x)$ δεν μηδενίζονται στο (a,b). Τέλος, έστω ότι $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$. Αποδειξε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

2.4.18. Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί την συνθήκη *Lipschitz* τάξεως k στο σημείο x_0 ανν υπάρχουν αριθμοί M, e τέτοιοι ώστε

$$|x-x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < M \cdot |x-x_0|^k.$$

Έστω $f(x)$ που ικανοποιεί την συνθήκη *Lipschitz* τάξεως k στο σημείο x_0. Δείξτε ότι:

1. $k > 0 \Rightarrow$ «η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0».
2. $k > 1 \Rightarrow$ «η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0».

2.4.19. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{όταν} \quad x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Αποδειξε ότι: η $f(x)$ είναι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x = \sqrt{k}$ και το k δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

2.4.20. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{όταν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{όταν} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε όλο το $\mathbb{R}$.

2.4.21. Έστω συνάρτηση $f(x)$ η οποία

1. Είναι συνεχής στο $[a,b]$ και για κάθε $x \in [a,b] : a \leq f(x) \leq b$.
2. Είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και για κάθε $x \in (a,b) : f'(x) \leq k < 1$.

   Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

2.4.22. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f'(x)\frac{x}{2}.$$

Αποδειξε ότι $f(x) = ax + b$.

2.4.23. Αποδειξε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ για το οποίο ισχύουν

$$\forall x : \pi(x) > \pi''(x) \text{ και } \forall x : \pi'(x) > \pi''(x) \ .$$

2.4.24. Αν η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε και η $(f(x))^2$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.25. Αν η $(f(x))^2$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε και η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.26. Αν η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε και η $|f(x)|$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.27. Αν η $f(x)$ ειναι απειρα παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιει $0 = f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots$ τοτε η $f(x) = 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$. Σωστο ή λαθος;

2.4.28. Αν η $f(x) + g(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο x_0 τοτε οι $f(x), g(x)$ ειναι παραγωγισιμες στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.29. Αν η $f(x) \cdot g(x)$ και η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμες στο x_0 τοτε η $g(x)$ ειναι επισης παραγωγισιμη στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.30. Υπαρχει συναρτηση η οποια ειναι παραγωγισιμη ακριβως σε ενα σημειο του πεδιου ορισμου της. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.31. Αν η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο x_0 τοτε ειναι συνεχης σε καποιο διαστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.32. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο (a, b) και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.33. Αν η $f(x)$ είναι παραγωγισιμη στο (a, b) και η $f'(x)$ δεν ειναι φραγμενη στο (a, b), τότε και η $f(x)$ δεν ειναι φραγμενη στο (a, b). Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.34. Εστω συνολο A και $f(x)$ τετοια ωστε $f'(x) = 0$ για καθε $x \in A$· τοτε η $f(x)$ ειναι σταθερη στο A. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.35. Για καθε $x \in (a, b)$, οι συναρτησεις $f(x)$, $g(x)$ ειναι διαφορισιμες και ικανοποιουν $f(x) < g(x)$. Τοτε ισχυει και $f'(x) < g'(x)$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.36. Αν $f'(x_0) = 0$, τοτε η $f(x)$ δεν ειναι ουτε αυξουσα ουτε φθινουσα στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.37. Αν για καθε $x \in (a, b)$ ισχυει $f'(x) > 0$, τοτε η $f(x)$ ειναι αυξουσα για καθε $x \in (a, b)$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.38. Αν η $f(x)g(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε και η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.39. Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμες στο x_0, τοτε και η $f(x)g(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.40. Αν η $f'(x_0) > 0$ τοτε η $f(x)$ ειναι αυξουσα σε καποιο διαστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.41. Αν η $f(x)$ εχει τοπικο ακροτατο στο x_0 και ειναι δις διαφορισιμη, τοτε $f''(x_0) \neq 0$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.42. Αν η $f(x)$ ειναι αυστηρα αυξουσα στο (a, b), τοτε $f'(x) > 0$ για καθε $x \in (a, b)$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

2.4.43. Αν $f''(x) > 0$ για καθε $x \in (a, b)$ και τα κ, λ ικανοποιουν $\kappa \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\kappa + \lambda = 1$, τοτε για καθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ ισχυει $f(\kappa x_1 + \lambda x_2) > \kappa f(x_1) + \lambda f(x_2)$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

Κεφάλαιο 3

Λογαριθμικες και Εκθετικες Συναρτησεις

Στο παρόν κεφάλαιο ορίζουμε την λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$ με έμμεσο τρόπο, διαμεσου της παραγωγου. Κατόπιν ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση e^x ως αντίστροφη της $\ln x$. Η εκθετική είναι ίσως η πιο θεμελιώδης συνάρτηση των μαθηματικών.

3.1 Θεωρια και Παραδειγματα

3.1.1. Ορισμος: Ορίζουμε την συνάρτηση $L(x)$ ως εξής: (α) έχει πεδίο ορισμού το $(0, \infty)$, (β) για κάθε $x \in (0, \infty)$ έχουμε $L'(x) = \frac{1}{x}$, (γ) $L(1) = 0$.

3.1.2. Θεωρημα: Η $L(x)$ είναι μοναδική.

Αποδειξη. Έστω ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις $L_1(x)$ και $L_2(x)$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες του Ορισμού 3.1.1. Θα έχουμε για κάθε $x \in (0, \infty)$: $L_1'(x) = L_2'(x) = \frac{1}{x}$. Τότε $L_1'(x) - L_2'(x) = 0$, οπότε $L_1(x) - L_2(x) = c$ (δηλ. σταθερός αριθμός). Επίσης $L_1(1) = 1$ και $L_2(1) = 1$, οπότε $0 = 1 - 1 = L_1(1) - L_2(1) = c$. Δηλαδή $L_1(x) - L_2(x) = 0$ και άρα υπάρχει μία και μόνο συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 3.1.1.

3.1.3. Θεωρημα: Για κάθε $x \in (0, \infty)$ η $L(x)$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και κοιλη.

Αποδειξη. Για κάθε $x \in (0, \infty)$ η $L(x)$ έχει παράγωγο: $L'(x) = \frac{1}{x}$. Δηλ. η $L(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$, άρα είναι και συνεχής στο $(0, \infty)$. Για κάθε $x \in (0, \infty)$ έχουμε $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Άρα η $L(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$. Εχουμε $L''(x) = -\frac{1}{x^2}$, το οποιο ειναι αρνητικο για καθε $x \in (0, \infty)$.

3.1.4. Θεωρημα: Για κάθε $x, y \in (0, \infty)$ και $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

1. $L(x) + L(y) = L(xy)$.
2. $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.
3. $L(x^a) = aL(x)$.

Αποδειξη. Ας θεωρήσουμε προς στιγμή το y σταθερό. Τότε $\frac{d}{dx}(L(xy)) = \frac{1}{xy}(xy)' = \frac{1}{xy}y = \frac{1}{x}$. Και $\frac{d}{dx}(L(x) + L(y)) = \frac{d}{dx}(L(x)) + \frac{d}{dx}(L(y)) = \frac{1}{x} + 0$. Με άλλα λόγια

$$\frac{d}{dx}(L(x) + L(y)) = \frac{d}{dx}(L(xy))$$

οπότε

$$L(x) + L(y) = L(xy) + c.$$

Παίρνοντας τώρα $y = 1$ έχουμε

$$L(x) + L(1) = L(x) + c \Rightarrow 0 = L(1) = c.$$

Οπότε $L(x) + L(y) = L(xy)$. Έχουμε

$$L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = L\left(x\frac{1}{x}\right) = L(1) = 0$$

από το οποίο προκύπτει άμεσα το $L(1/x) = -L(x)$.Τελος εχουμε $(L(x^a))' = \frac{1}{x^a}(x^a)' = \frac{1}{x^a}ax^{a-1} = \frac{a}{x} = aL'(x)$. Οπότε $L(x^a) = aL(x) + c$ και θέτοντας $a = 1$ βλέπουμε ότι $c = 0$.

3.1.5. Θεωρημα. Για καθε $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ εχουμε

$$1 - \frac{1}{x} < L(x) < x - 1.$$

Αποδειξη. Εαν $x > 1$ και αφου η $L(x)$ ειναι παραγωγισιμη, υπαρχει $z \in (1,x)$ τετοιο ωστε

$$1 > \frac{1}{z} = L'(z) = \frac{L(x) - L(1)}{x - 1} = \frac{L(x)}{x - 1}.$$

Εαν $x < 1$, τοτε υπαρξει $z \in (x,1)$ τετοιο ωστε

$$1 < \frac{1}{z} = L'(z) = \frac{L(1) - L(x)}{1 - x} = \frac{-L(x)}{1 - x}.$$

Ετσι εχουμε αποδειξει το ανω φραγμα του $L(x)$. Για το κατω φραγμα, θετουμε $x = \frac{1}{y}$ και εχουμε

$$L(x) < x - 1 \Rightarrow L\left(\frac{1}{y}\right) < \frac{1}{y} - 1 \Rightarrow -L(y) < \frac{1}{y} - 1$$

το οποιο δινει το κατω φραγμα.

3.1.6. Θεωρημα: Η $L(x)$ έχει πεδίο τιμών το $(-\infty,\infty)$.

Αποδειξη. Καταρχην θα δειξουμε οτι $L(2) > \frac{1}{2}$. Στην ανισοτητα $1 - \frac{1}{x} < L(x)$ θετουμε $x = 2$ και παιρνουμε

$$L(2) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Τωρα επιλεγουμε τυχον $M > 0$ και θετουμε $x_M = 2^{2M}$. Τότε $L(x_M) = L(2^{2M}) = 2M \cdot L(2)$. Οποτε

$$\forall x > x_M : L(x) > L(x_M) = 2ML(2) > 2M\frac{1}{2} = M$$

δηλ. $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι $\lim_{x\to-\infty} L(x) = -\infty$. Τώρα, ας πάρουμε ένα τυχόντα αριθμό $y_0 \in (-\infty,\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} L(x) = -\infty$, μπορούμε να βρούμε x_1 τέτοιο ώστε $L(x_1) < y_0$· επειδή $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$, μπορούμε να βρούμε x_2 τέτοιο ώστε $L(x_2) > y_0$. Θα είναι $x_1 < x_2$ (γιατί;). Επειδή η $L(x)$ είναι συνεχής, θα υπάρχει $x_0 \in [x_1, x_2]$ τέτοιο ώστε $L(x_0) = y_0 \in [L(y_1), L(y_2)]$.

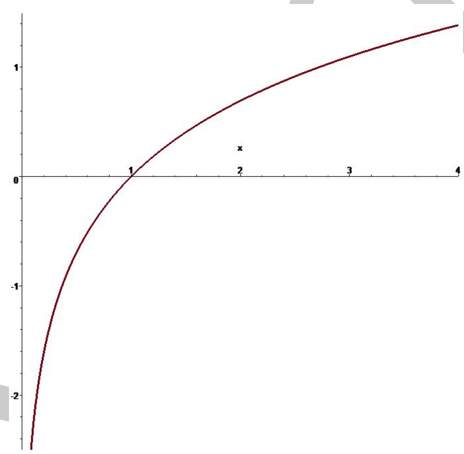
3.1.7. Θεωρημα: Η εξίσωση $L(x) = 1$ έχει μία μοναδική ρίζα, την οποία θα συμβολίζουμε με το σύμβολο e.

Αποδειξη. Επειδή η $L(x)$ έχει πεδίο τιμών το $(-\infty, \infty)$, θα υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $L(x_0) = 1$. Επειδή η $L(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, προφανώς το x_0 θα είναι μοναδικό. Κατά συνθήκη, θα συμβολίζουμε το x_0 με το σύμβολο e.

3.1.8. Συμβολισμος: Θα ονομάζουμε την $L(x)$ *λογαριθμική συνάρτηση* και συνήθως θα την συμβολίζουμε με $\ln x$ αντί $L(x)$.

3.1.9. Ασκηση: Κανε την γραφικη παρασταση της $L(x)$.

Λύση. Γνωριζουμε οτι το πεδιο ορισμου της $L(x)$ ειναι το $(0, \infty)$ και το πεδιο τιμων ειναι το $(-\infty, \infty)$. Επισης γνωριζουμε οτι $L(1) = 0$ και οτι υπαρχει αριθμος $e > 1$ (γιατι;) τετοιος ωστε $L(e) = 1$. Τελος, γνωριζουμε οτι η $L(x)$ συνεχής, γνησίως αύξουσα και κοιλη. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κατασκευασουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.1.



Σχ.3.1: Η λογαριθμικη συναρτηση $L(x)$.

3.1.10. Ασκηση. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = x^2 \ln(x^3)$.

Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2 \ln\left(x^3\right)\right) &= \frac{d}{dx}\left(3x^2 \ln(x)\right) \\ &= \left(3x^2\right)' \ln x + 3x^2 (\ln x)' \\ &= 6x \ln x + 3x^2 \frac{1}{x} = 3x(2\ln x + 1)\end{aligned}$$

3.1.11. Ασκηση. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \ln(x^3 - x + 1)$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $L'(x) = \frac{1}{x}$ (δηλ. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$) και τις ιδιότητες της παραγώγισης (παραγώγιση γινομένου, αλυσιδωτή παραγώγιση).

$$\left[\ln\left(x^2 + 1\right)\right]' = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 1}.$$

3.1.12. Παρατηρηση: Εν κατακλειδι: στον Ορισμο 3.1.1 *ορισαμε* την λογαριθμική συνάρτηση $L(x)$ δια μεσου της παραγωγου της. Κατόπιν αποδείξαμε διάφορες ιδιότητες της $L(x)$ και παρατηρουμε ότι είναι ακριβώς αυτές τις οποίες έχει και η λογαριθμική συνάρτηση όπως μας είναι γνωστή από την στοιχειώδη Άλγεβρα. Οπότε προτιμούμε να «ξεχάσουμε» τον αλγεβρικό ορισμό και να χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό 3.1.1. Πρακτικά δεν έχουμε χάσει τίποτε, διότι η συνάρτηση $L(x)$ έχει ακριβώς τις (χρήσιμες) ιδιότητες της αλγεβρικά ορισμένης λογαριθμικής συνάρτησης.

3.1.13. Θεωρημα: Η συνάρτηση $L(x)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση $E(x)$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(0, \infty)$.

Αποδειξη. Η $L(x)$ είναι γνησίως αύξουσα αρα 1-προς-1 και εχει αντιστροφη, την $E(x)$. Το πεδίο τιμών (αντίστοιχα, πεδίο ορισμού) της $L(x)$ είναι το $(-\infty, \infty)$ (αντίστοιχα, το $(0, \infty)$). Οποτε το πεδίο ορισμου (αντίστοιχα, πεδίο τιμων) της $E(x)$ είναι το $(-\infty, \infty)$ (αντίστοιχα, το $(0, \infty)$).

3.1.14. Ασκηση: Υπολογισε τα $L(E(x)) = E(L(x))$.

Λύση. Αφου η $E(x)$ ειναι η αντιστροφη της $L(x)$, εχουμε $L(E(x)) = E(L(x)) = x$.

3.1.15. Ασκηση: Υπολογισε τα $E(0)$ και $E(1)$.

Λύση. $L(1) = 0$, οποτε $E(0) = 1$. Επισης $L(e) = 1$, οποτε και $E(1) = e$.

3.1.16. Θεωρημα: Για κάθε $x, y \in (-\infty, \infty)$ έχουμε

1. $E(x) \cdot E(y) = E(x + y)$.
2. $(E(x))^y = E(x \cdot y)$.

Αποδειξη. Αφού $L(x) = E^{-1}(x)$, έχουμε $L(E(x + y)) = x + y$. Επίσης

$$L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x)) + L(E(y)) = x + y.$$

Δηλ. $L(E(x + y)) = L(E(x) \cdot E(y))$. Οπότε

$$E[L(E(x + y))] = E[L(E(x) \cdot E(y))] \Rightarrow E(x + y) = E(x) \cdot E(y).$$

Έχουμε $L[(E(x))^y] = yL[E(x)] = yx$ και $L[E(x \cdot y)] = xy$. Οπότε $(E(x))^y = E(x \cdot y)$.

3.1.17. Θεωρημα: Για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$ έχουμε $E(x) = e^x$ (δηλ. ο αριθμος e υψωμενος στην δυναμη x).

Αποδειξη. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : E(n) = e^n. \tag{3.1}$$

Για $n = 0$ η (3.1) γινεται οτι $E(0) = e^0 = 1$, το οποιο ισχυει. Εστω οτι η (3.1) ισχυει για $n \in \{0, 1, 2, ..., k\}$. Τοτε

$$E(k) = e^k \Rightarrow E(k + 1) = E(k)E(1) = e^k e = e^{k+1}$$

και η αποδειξη ειναι πληρης για το συνολο $\mathbb{N}_0$. Για την επεκταση στο $\mathbb{R}$ απαιτειται περισσοτερη εργασια.

3.1.18. Συμβολισμος: Θα ονομάζουμε την $E(x)$ *εκθετική συνάρτηση* και συνήθως θα την συμβολίζουμε με e^x αντί $E(x)$. Με άλλα λόγια, $E(x) = e^x$.

3.1.19. Παρατηρηση: *Ορίσαμε* την εκθετική συνάρτηση να είναι η αντίστροφη της λογαριθμικής (αυτής που έχει τις ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1) και κατόπιν αποδείξαμε διάφορες ιδιότητες αυτής και παρατηρήσαμε ότι είναι ακριβώς αυτές τις οποίες έχει και η εκθετική συνάρτηση όπως μας είναι γνωστή από την στοιχειώδη Άλγεβρα. Πρακτικά δεν έχουμε χάσει τίποτε, διότι η συνάρτηση $E(x)$ έχει ακριβώς τις (χρήσιμες) ιδιότητες της αλγεβρικά ορισμένης εκθετικής συνάρτησης. Αξίζει να σημειωθεί ιδιαίτερα ότι το x στην «e^x» είναι πράγματι ένας εκθέτης, αφού έχει τις ιδιότητες $e^x e^y = e^{x+y}$, $(e^x)^y = e^{xy}$.

3.1.20. Ασκηση. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = e^{x^2+3x}$.

Λύση. Εχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2+3x}\right) = \frac{d}{dh}\left(e^h\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+3x\right) = e^{x^2+3x}(2x+3).$$

3.1.21. Ασκηση: Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = e^x \cdot (2x^3 + \ln x)$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $E'(x) = E(x)$ (δηλ. $(e^x)' = e^x$) και τις ιδιότητες της παραγώγισης (παραγώγιση γινομένου, αλυσιδωτή παραγώγιση).

$$\left(e^x \cdot \left(2x^3 + \ln x\right)\right)' = e^x \cdot \left(2x^3 + \ln x\right) + e^x \cdot \left(6x^2 + \frac{1}{x}\right) = \frac{x\ln x + 6x^3 + 2x^4 + 1}{x} e^x.$$

3.1.22. Θεωρημα: Για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$ έχουμε $E'(x) = E(x)$.

Αποδειξη. Έστω $y = E(x)$ και $L(y) = x$. Τότε

$$1 = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(L(E(x))) = \frac{d}{dx}(L(y)) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}E'(x)$$

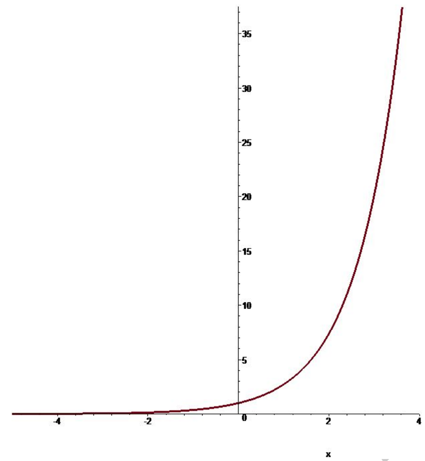
οπότε $E(x) = y = E'(x)$.

3.1.23. Θεωρημα: Για κάθε $x \in (0, \infty)$ η $E(x)$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και κυρτη.

Αποδειξη. Για καθε $x \in (-\infty, \infty)$: (α) αφου $E'(x) = E(x)$, η $E(x)$ ειναι παραγωγισιμη και αρα συνεχης· (β) αφου $E'(x) = E(x) = e^x > 0$ η $E(x)$ ειναι αυξουσα· (γ) αφου $E''(x) = (E'(x))' = E'(x) = e^x > 0$, η $E(x)$ ειναι κυρτη.

3.1.24. Ασκηση: Κανε την γραφικη παρασταση της $E(x)$.

Λύση. Γνωριζουμε οτι το πεδιο ορισμου της $E(x)$ ειναι το $(-\infty, \infty)$ και το πεδιο τιμων ειναι το $(0, \infty)$. Επισης γνωριζουμε οτι $E(0) = 1$ και οτι $E(1) = e > 1$ (γιατι;). Τελος, γνωριζουμε οτι η $E(x)$ συνεχής, γνησίως αύξουσα και κυρτη. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κατασκευασουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.2.



Σχ.3.2: Η εκθετικη συναρτηση $E(x)$.

3.1.25. Θεωρημα: Για κάθε $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχυει το εξης:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{3.2}$$

Αποδειξη. Μπορουμε να γραψουμε την (3.2) στην μορφη

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{3.3}$$

απο την οποια φαινεται οτι το e^x μπορει να γραφει ως ενα *πολυωνυμο απειρης ταξης*. Εδω βλεπουμε μια ειδικη περιπτωση μιας γενικοτερης ιδεας: *καποιες συναρτησεις μπορουν να παρασταθουν ως πολυωνυμα απειρης ταξης*:

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots \tag{3.4}$$

Γεννιουνται τωρα δυο ερωτηματα: (α) τι συνθηκες πρεπει να ικανοποιει η $f(x)$ ωστε να *συγκλινει* η (3.4); και (β) αν η (3.4) συγκλινει, πως υπολογιζονται οι συντελεστες f_0, f_1, f_2, ... ωστε το αριστερο και δεξιο μελος της (3.4) να ισουνται; Εδω θα απαντησουμε μονο το δευτερο ερωτημα· το πρωτο θα απαντηθει στο Κεφαλαιο 13. Εστω λοιπον οτι

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{3.5}$$

Παραγωγιζοντας διαδοχικα την (3.5) παιρνουμε

$$\begin{aligned} e^x &= e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ (e^x)' &= e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \\ (e^x)'' &= e^x = 2a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3 x + \ldots \\ (e^x)''' &= e^x = 2\cdot 3\cdot a_3 + \ldots \\ &\ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Τωρα, στην (3.6) θετουμε $x = 0$ οποτε παιρνουμε

$$
\begin{aligned}
1 &= a_0 \\
1 &= a_1 \\
1 &= 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \\
1 &= 2 \cdot 3 \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

και μπορουμε ευκολα να αποδειξουμε επαγωγικα τον γενικο τυπο

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Οποτε η (3.6) γινεται

$$e^x = 1 + x + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{3.7}$$

που ειναι το ζητουμενο.

3.1.26. Ασκηση: Υπολογισε το e και το e^2.

Λύση. Θα υπολογισουμε τα e, e^2 προσεγγιστικα. Θετουμε στην (3.7) $x = 1$ και λαμβανουμε

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{3.8}$$

Στον παρακατω πινακα φαινεται η προσεγγιστικη τιμη του e για διαφορες τιμες του n.

N	0	1	2	3	4	5
$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$	1.0000	2.0000	2.5000	2.6667	2.7083	2.7167

Φαινεται λοιπον οτι το $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ τεινει σε καποια τιμη $e \simeq 2.71\ldots$ · προσεξτε οτι το $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ ειναι αυξουσα συναρτηση του N (γιατι;). Για να υπολογισουμε το e^2 μπορουμε να θεσουμε στην (3.7) $x = 2$ οποτε λαμβανουμε

$$e^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Στον παρακατω πινακα φαινεται η προσεγγιστικη τιμη του e^2 για διαφορες τιμες του n.

N	0	1	2	3	4	5
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$	1.0000	3.0000	5.0000	6.3333	7.0000	7.2667

Φαινεται λοιπον οτι το $\sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{n!}$ τεινει σε καποια τιμη $e^2 \simeq 7.2667\ldots$. Εναλλακτικα, $e^2 \simeq (2.71)^2 = 7.3441$. Ποια απο τις δυο προσεγγισεις ειναι καλυτερη. Γιατι; Μπορειτε να βρειτε μια ακομη καλυτερη προσεγγιση;

3.1.27. Θεωρημα: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Αποδειξη. Το ζητουμενο ειναι ισοδυναμο με τα

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = 1, \tag{3.9}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \tag{3.10}$$

(γιατι ;). Θα αποδειξουμε το (3.10) με τον κανονα *L'Hospital*. Πραγματι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to0^+}\frac{\ln(1+z)}{z} = \frac{\lim_{z\to0^+}[\ln(1+z)]'}{\lim_{z\to0^+}[z]'} = \frac{\lim_{z\to0^+}\frac{1}{1+z}}{\lim_{z\to0^+}1} = 1.$$

3.1.28. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $\ln(1.2)$.

Λύση. Είναι $\ln(x+\Delta x) \simeq \ln x + (\ln x)' \cdot \Delta x$ και

$$\ln(1.2) = \ln(1+0.2) \simeq \ln 1 + \frac{1}{1}\cdot 0.2 = 0.2$$

Η ακριβής τιμή είναι $\ln 1.2 = 0.18232$.

3.1.29. Βρες τα μεγιστα και ελαχιστα της συναρτησης $x^4e^{-x^2}$.

Λύση. Εχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^4e^{-x^2}\right) = -2x^3e^{-x^2}\left(x^2-2\right) = 0$$

με ριζες (στασιμα σημεια) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}$. Επισης εχουμε

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^4e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2}x^2\left(-9x^2+2x^4+6\right)$$

οποτε

$$f''(x_1) = 4e^{-2}(-18+8+6) < 0,$$
$$f''(x_2) = 0,$$
$$f''(x_3) = 4e^{-2}(-18+8+6) < 0.$$

Αρα η $f(x)$ εχει τοπικα ελαχιστα στα x_1, x_2 και δεν μπορουμε να πουμε τι συμβαινει στο x_2.

3.1.30. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x + \ln(x^2-1)$.

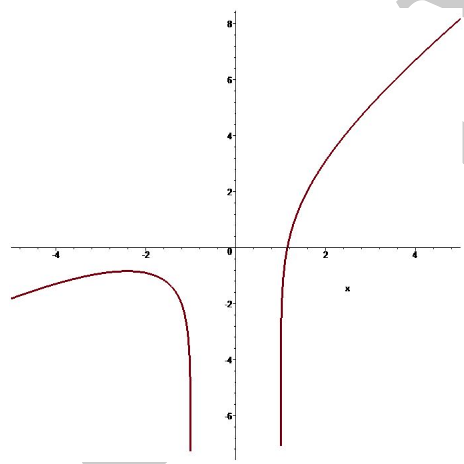
Λύση. Η $f(x)$ ειναι ορισμενη και συνεχης για καθε x τετοιο ωστε $x^2-1>0$, δηλ. στο $A = (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Εχουμε

$$\lim_{x\to-1^-}\left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to1^+}\left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right) = -\infty.$$

Επισης

$$f'(x) = \left(x + \ln\left(x^2 - 1\right)\right)' = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1},$$
$$f''(x) = \left(x + \ln\left(x^2 - 1\right)\right)'' = -\frac{2\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Θετοντας $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = 0$, βλεπουμε οτι τα στασιμα σημεια ειναι τα $x_1 = -1 - \sqrt{2} \in A$ και $x_2 = -1 + \sqrt{2} \notin A$. Αρα θα ασχοληθουμε μονο με το x_1, οπου εχουμε $f''(x_1) = \sqrt{2} - 2 < 0$, οποτε εχουμε τοπικο μεγιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) = \simeq -0.84$. Γενικοτερα, $f''(x) < 0$ για καθε $x \in A$, οποτε η $f(x)$ ειναι κοιλη στο A. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.3.



Σχ.3.3: Η γραφικη παρασταση της $f(x) = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$.

3.1.31. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x^2 e^{1/x}$.

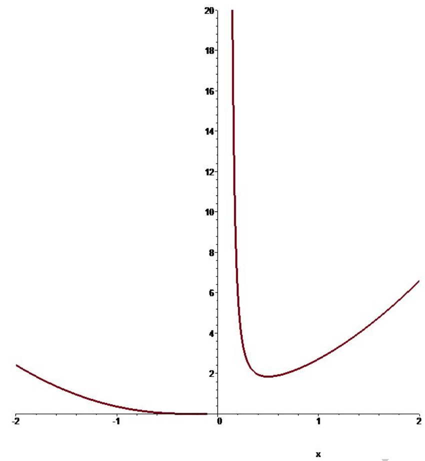
Λύση. Η $f(x)$ $f(x)$ ειναι ορισμενη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Η $f(x)$ ειναι θετικη και συνεχης στο A. Επειδη

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 e^{1/x} = 0 \neq \infty = \lim_{x \to 0^+} x^2 e^{1/x},$$

το $x_0 = 0$ ειναι σημειο ασυνεχειας. Εχουμε

$$f'(x) = \left(x^2 e^{1/x}\right)' = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1),$$
$$f''(x) = \left(x^2 e^{1/x}\right)'' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(2x^2 - 2x + 1\right).$$

Θετοντας $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1) = 0$, βλεπουμε οτι το μοναδικο στασιμο σημειο ειναι το $x_1 = \frac{1}{2}$ και επειδη $f''(x_1) > 0$, εχουμε τοπικο ελαχιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) = \frac{e^2}{4} \simeq 1.847$. Γενικοτερα, $f''(x) > 0$ για καθε $x \in A$ (γιατι;) οποτε η $f(x)$ ειναι κυρτη στο A. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.4.



Σχ.3.4: Η γραφικη παρασταση της $f(x) = x^2 e^{1/x}$.

3.2 Λυμενα Προβληματα

3.2.1. Βρες μια συνάρτηση $f(x)$ τετοια ώστε $f'(x) = 2f(x)$

Λύση. Θέλουμε μια συνάρτηση της οποίας η παράγωγος να είναι (*για κάθε x*) ίση με το διπλάσιο της αρχικής συνάρτησης. Αυτή η συνθήκη μας θυμίζει την εκθετική συνάρτηση, για την οποία γνωρίζουμε ότι έχει παράγωγο *ίση* με την αρχική. Πως μπρούμε να εισάγουμε τον συντελεστή 2; Ένας τρόπος είναι αν στην παραγώγιση της $f(x)$ υπεισέρχεται μια αλυσιδωτή παραγώγιση. Και έτσι σκεφτόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x) = e^{2x}$. Πράγματι, τότε έχουμε $(e^{2x}) = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$. Υπάρχουν άραγε και άλλες συναρτήσεις που να έχουν την ζητούμενη ιδιότητα;

3.2.2. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $L'(x) = \frac{1}{x}$ (δηλ. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$) και τις ιδιότητες της παραγώγισης (παραγώγιση γινομένου, αλυσιδωτή παραγώγιση).

$$\left[\ln\left(x^2 + x + 1\right)\right]' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

3.2.3. Υπολογισε το $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$ *χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα l'Hospital.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι το $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$ είναι ακριβώς (εκ του ορισμού) η $(\ln x)'$ υπολογισμένη στο $x = a$. Οπότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} = \left[\frac{d}{dx}(\ln(x))\right]_{x=a} = \frac{1}{a}.$$

3.2.4. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 1)$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $E'(x) = E(x)$ (δηλ. $(e^x)' = e^x$) και τις ιδιότητες της παραγώγισης (παραγώγιση γινομένου, αλυσιδωτή παραγώγιση).

$$\left(e^x \cdot \left(x^2+1\right)\right)' = e^x \cdot \left(x^2+1\right) + e^x \cdot 2x = e^x \cdot \left(x^2 + 2x + 1\right).$$

3.2.5. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = e^{x^2-4x+5}$.

Λύση.

$$\left(e^{x^2-4x+5}\right)' = (2x-4)\cdot e^{x^2-4x+5}.$$

3.2.6. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = a^x$.

Λύση. Έχουμε $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$ και

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = (e^u)' \cdot (x\cdot \ln a)' = (e^u)\cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

(οπου θεσαμε $u = x\ln a$).

3.2.7. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $e^{1.1}$.

Λύση. Είναι $e^{x+\Delta x} \simeq e^x + (e^x)'\cdot \Delta x$ και

$$e^{1.1} = e^{1+0.1} \simeq e^1 + e^1 \cdot 0.1 = e\cdot(1+0.1) \simeq 1.1\cdot 2.718 = 2.9898.$$

Η ακριβής τιμή είναι $e^{1.1} = 3.0042$.

3.2.8. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $\ln(1.2)$.

Λύση. Είναι $\ln(x+\Delta x) \simeq \ln x + (\ln x)'\cdot \Delta x$ και

$$\ln(1.2) = \ln(1+0.2) \simeq \ln 1 + \frac{1}{1}\cdot 0.2 = 0.2$$

Η ακριβής τιμή είναι $\ln 1.2 = 0.18232$.

3.2.9. Βρες τα μεγιστα και ελαχιστα της συναρτησης $x^3 e^{-x^2}$.

Λύση. Εχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 e^{-x^2}\right) = -x^2 e^{-x^2}\left(2x^2-3\right) = 0$$

με ριζες (στασιμα σημεια) $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Επισης εχουμε

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^3 e^{-x^2}\right) = 2xe^{-x^2}\left(2x^4 - 7x^2 + 3\right)$$

οποτε

$$f''(x_1) > 0, \quad f''(x_2) = 0, \quad f''(x_3) < 0.$$

Αρα η $f(x)$ εχει τοπικο ελαχιστο στο x_1 και τοπικο μεγιστο στο x_3. Δεν μπορουμε να αποφανθουμε για το x_2.

3.2.10. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \ln(x) - x^2$. .

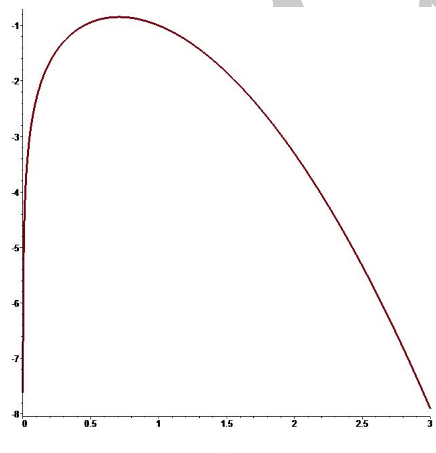
Λύση. Η $f(x)$ ειναι ορισμενη και συνεχης στο $A = (0, \infty)$. Εχουμε

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\ln(x) - x^2 \right) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln(x) - x^2 \right) = \infty.$$

Επισης

$$f'(x) = \left(\ln(x) - x^2 \right)' = \frac{1}{x} - 2x,$$
$$f''(x) = \left(\ln(x) - x^2 \right)'' = -\frac{1}{x^2} - 2.$$

Θετοντας $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = 0$, βλεπουμε οτι το μοναδικο στασιμο σημει0 στο $(0, \infty)$ ειναι το $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Εχουμε $f''(x_1) = -\frac{1}{2} - 2 < 0$, οποτε εχουμε τοπικο ελαχιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) \simeq -0.846$. Γενικοτερα, $f''(x) < 0$ για καθε $x \in (0, \infty)$, οποτε η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(0, \infty)$. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.5.



Σχ.3.5: Η γραφικη παρασταση της $f(x) = \ln(x) - x^2$.

3.2.11. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x(1 - e^x)$.

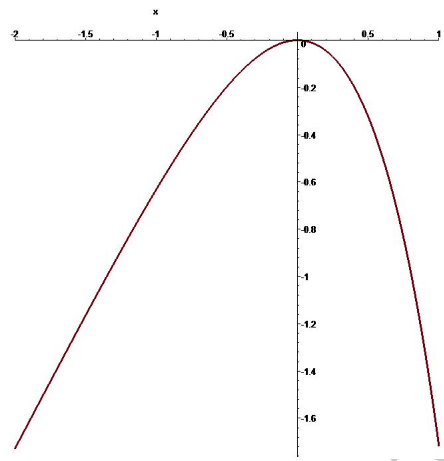
Λύση. Εχουμε

$$f'(x) = (x(1 - e^x))' = 1 - xe^x - e^x,$$
$$f''(x) = \left(x^2 e^{1/x} \right)'' = -e^x (x + 2).$$

Θετοντας

$$f'(x) = 1 - xe^x - e^x = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{1 + x}$$

βλεπουμε οτι το μοναδικο στασιμο σημειο ειναι το $x_1 = 0$ και επειδη $f''(x_1) < 0$, εχουμε τοπικο μεγιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) = 0$. Γενικοτερα, $f''(x) < 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$, οποτε η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $\mathbb{R}$. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.6.



Σχ.3.6: Η γραφικη παρασταση της $f(x) = x(1 - e^x)$.

3.3 Αλυτα Προβληματα

3.3.1. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty}(x)^{1/x} = 1$.

3.3.2. Δείξτε ότι $\lim_{x\to e}\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{1}{e}$.

3.3.3. Υπολογισε τα ορια.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$. *Απ.* $\frac{1}{\ln 3}$.
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$. *Απ.* 1.
3. $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$. *Απ.* ∞.
4. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$. *Απ.* e^{-8}.

3.3.4. Δειξε ότι $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/(2x)} = e^{\frac{1}{2}}$ *χωρις να χρησιμοποιησεις τον κανονα l'Hospital.*

3.3.5. Υπολογισε το $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ *χωρις να χρησιμοποιησεις τον κανονα l'Hospital.*

3.3.6. Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = \frac{1}{1 - e^{x/(1-x)}}$.

3.3.7. Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = 2^{-2^{1/(1-x)}}$.

3.3.8. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x)$.

1. $f(x) = e^x \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$. *Απ.* $\frac{1}{x^2}e^x\left(x^5 + 3x^4 + x - 1\right)$.
2. $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$. *Απ.* $-\frac{e^x}{(x^2-1)^2}\left(-x^2 + 2x + 1\right)$.
3. $f(x) = e^{-1/x^2}$. *Άπ.* $\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

4. $f(x) = \ln(x^2+1)$. *Απ.* $2\frac{x}{x^2+1}$.
5. $f(x) = \sqrt[4]{e^x+3^x+2}$. *Απ.* $\frac{1}{4}\sqrt[4]{e^x+3^x+2}\frac{e^x+3^x\ln 3}{e^x+3^x+2}$.

3.3.9. Υπολογισε την $\frac{dy}{dx}$ οταν $e^{-y/x}+\ln x = c$.

3.3.10. Υπολογισε τις $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $x+y=e^{x-y}$.

3.3.11. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x)=5^x$. *Λύση.* $5^x\ln 5$.

3.3.12. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $e^{0.9}$. *Απ.* 2.4351 .

3.3.13. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $\ln(0.9)$. *Απ.* $= -0.1042$.

3.3.14. Εξετασε την μονοτονια της $f(x)$.

1. $f(x) = \ln|x|$.
2. $f(x) = \ln(1-x^2)$.
3. $f(x) = 2x^2 - \ln x$.
4. $f(x) = e^x + 5x$.

3.3.15. Βρες τα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)$.

1. $f(x) = (x^2-1)\ln x$.
2. $f(x) = x^2e^{-x}$.
3. $f(x) = x^3e^{-x}$.

3.3.16. Εξετασε την κυρτοτητα / κοιλοτητα της $f(x)$.

1. $f(x) = \ln|x|$.
2. $f(x) = x^2e^{-x}$.
3. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

3.3.17. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x^2\ln(x+2)$.

3.3.18. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x^2e^{-4x}$.

3.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

3.4.1. Αποδειξε ότι:

1. $\forall x : 1 + x < e^x$.
2. $\forall x : 1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$.
3. $\forall x : x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$.
4. $\forall x : x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
5. $x < 1 \Rightarrow 1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$.
6. $x > -1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < 1 - e^{-x} < x$.
7. $x < 1 \Rightarrow e^{-\frac{x}{1-x}} < 1 - x < e^{-x}$.
8. $x, y > 0 \Rightarrow e^{\frac{xy}{x+y}} < \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y < e^x$.
9. $x > -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(1 + x) < x.x < 1 \Rightarrow x < -\ln(1 - x) < \frac{x}{1-x}$.

3.4.2. Αποδειξε ότι $x \in [0, 1/2] \Rightarrow -\frac{3}{2}x < \ln(1 - x) < \frac{3}{2}x$. Μπορεις να βελτιωσεις το ανω φραγμα;

3.4.3. Αποδειξε ότι $x \in (-1, 1) \Rightarrow \ln(1 - |x|) \leq \ln(1 + x) \leq -\ln(1 - |x|)$.

3.4.4. Αποδειξε ότι:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
2. $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$.
3. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ *χωρις να χρησιμοποιησεις τον κανονα l'Hospital.*

3.4.5. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x\ln(2x)$.

3.4.6. Για ποιες τιμες της c εχει λυσεις η εξισωση $\ln x = cx^2$;

3.4.7. Λυσε την εξισωση.

1. $\ln(x^3 + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 1) = \ln 3$.
2. $5^x + 12^x = 13^x$.
3. $2^x = 1 - x$.

3.4.8. Αποδειξε ότι

$$(\forall x : f'(x) < f(x)) \Rightarrow (\forall x : f(x) < f(0) \cdot e^x).$$

3.4.9. Βρες μια συνάρτηση $f(x)$τέτοια ώστε $f'(x) = 3f(x)$ και $f(0) = 5$. *Απ.* $5e^{3x}$.

3.4.10. Βρες δύο *διαφορετικές* συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x)$τέτοιες ώστε $f_i'(x) = -f_i(x)$. *Απ.* $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = 4e^{-x}$.

3.4.11. Βρες δύο συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x)$τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_2(x) \\ f_2'(x) &= f_1(x). \end{aligned}$$

Απ. $f_1(x) = e^x + e^{-x}$, $f_2(x) = e^x - e^{-x}$.

3.4.12. Βρες δύο συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x)$τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ f_2'(x) &= f_1(x) - f_2(x). \end{aligned}$$

Απ. $f_1(x) = e^{\sqrt{2x}} + e^{-\sqrt{2x}}$, $f_2(x) = e^{\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{2x}}$.

3.4.13. Βρες δύο συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x)$τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_2(x) \\ f_2'(x) &= -f_1(x). \end{aligned}$$

Απ. $f_1(x) = e^{ix} + e^{-ix}$, $f_2(x) = e^{ix} - e^{-ix}$.

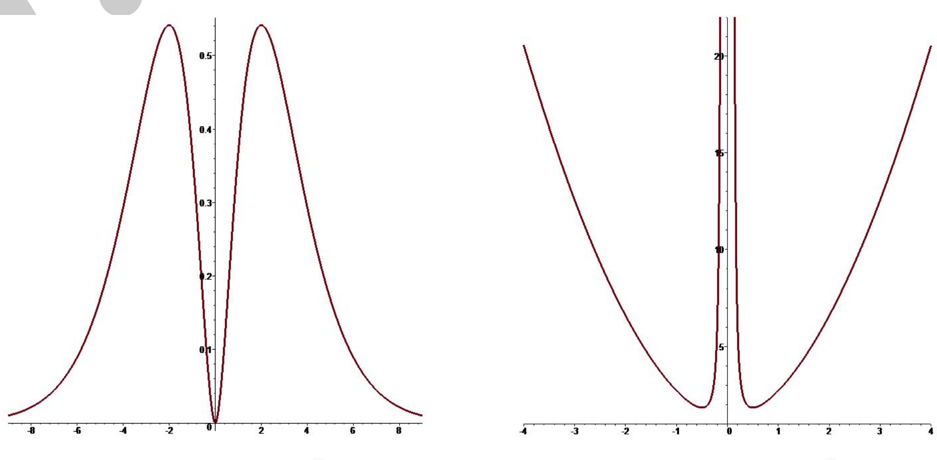
3.4.14. Έστω συνάρτηση $f(x)$ η οποία ικανοποιει (α) $\forall x : f'(x) < k \cdot f$ και (β) $f(0) = 1$. Δειξε οτι $\forall x : f(x) \leq e^{kx}$.

3.4.15. Εστω $n \in (1, \infty)$ και $r(n)$ η μοναδικη πραγματικη λυση της εξισωσης $x(1 + \ln x) = n$. Αποδειξε οτι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r(n) \ln n}{n} = 1.$$

3.4.16. Βρες την συναρτηση η οποια εχει την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.7.α .

3.4.17. Βρες την συναρτηση η οποια εχει την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.7.β .



Σχ.3.7: Βρες τις συναρτησεις.

3.4.18 (Μαθηματικη Ολυμπιαδα). Βρες ολες τις πραγματικες ριζες της εξισωσης.

1. $4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}$.
2. $6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1}$.

Κεφάλαιο 4

Τριγωνομετρικες Συναρτησεις

Οι *τριγωνομετρικές συναρτήσεις* είναι το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη, η συνεφαπτομένη, η τέμνουσα και η συντέμνουσα. Οι ορισμοί και οι ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων μας είναι γνωστά από το Λύκειο. Όμως τώρα θα δώσουμε νέους (ισοδύναμους με τους παλαιούς) ορισμούς αυτών των συναρτήσεων.

4.1 Θεωρια και Παραδειγματα

4.1.1. Ορισμος: Ορίζουμε στο $(-\infty, \infty)$ τις συναρτήσεις

$$\textit{Συνημίτονο}: \ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \tag{4.1}$$

$$\textit{Ημίτονο}: \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{4.2}$$

4.1.2. Παρατηρηση: Οπως και στο προηγουμενο κεφαλαιο, απαιτειται διερευνηση της ορθοτητας του Ορισμου 4.1.1 και, συγκεκριμενα, της συγκλισης των απειρων αθροισματων (4.1)-(4.2). Αυτη η διερευνηση θα γινει στο Κεφαλαιο 13.

4.1.3. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots$$

$$e^{-ix} = 1 - ix + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \frac{(-ix)^4}{4!} + \frac{(-ix)^5}{5!} + \ldots$$

τα οποια δινουν

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ldots$$

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} + \ldots$$

Προσθετοντας κατα μελη παιρνουμε

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$$

και αφαιρωντας κατ μελη παιρνουμε

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

τα οποια δινουν τα ζητουμενα.

4.1.4. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) \text{ (δηλ. το } \textit{πραγματικο} \text{ μέρος της } e^{ix}\text{)}$$
$$\sin x = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) \text{ (δηλ. το } \textit{φανταστικο} \text{ μέρος της } e^{ix}\text{).}$$

Αποδειξη. Στο προηγουμενο εχουμε δει οτι

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ldots \\ e^{-ix} &= 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} + \ldots \\ \hline &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ldots = \overline{e^{ix}} \end{aligned}$$

(οπου $\overline{a + ib} = a - ib$). Ξερουμε οτι για καθε μιγαδικο αριθμο $z = a + ib$ ισχυει

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \mathrm{Re}\left(z\right), \qquad \frac{z - \overline{z}}{2i} = \mathrm{Im}\left(z\right).$$

Οποτε εχουμε

$$\cos x = \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right), \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right).$$

4.1.5. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{4.3}$$

.

Αποδειξη. Έχουμε $e^{ix} = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) + i\,\mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \cos x + i \sin x$.

4.1.6. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{4.4}$$

Αποδειξη.

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} + 2}{4} - \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

4.1.7. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x. \tag{4.5}$$

Αποδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \frac{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}}{2} = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} = \cos x, \\ \sin(-x) &= \frac{e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}}{2i} = \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} = \text{-}\sin x. \end{aligned}$$

4.1.8. Θεωρημα: Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned}$$

4.1.9. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned} \cos x \cos y - \sin x \sin y &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(-x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} + \frac{e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{i(-x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} \\ &= \frac{2e^{i(x+y)} + 2e^{-i(x+y)}}{4} = \cos(x+y). \end{aligned}$$

4.1.10. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$(\cos(x))' = -\sin x, \qquad (\sin(x))' = \cos x. \tag{4.6}$$

Αποδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} (\cos(x))' &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \dots = -x + \frac{x^3}{3!} - \dots = -\sin x, \\ (\sin(x))' &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x. \end{aligned}$$

4.1.11. Θεωρημα: Οι συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $(-\infty, \infty)$.
Αποδειξη. Προκύπτει άμεσα από το ότι υπαρχουν οι $(\cos x)'$ και $(\sin x)'$.

4.1.12. Λημμα. Αποδειξε οτι: αν η $f(x)$ ειναι δις διαφορισιμη και κοιλη, τοτε

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f'(y)(y-x) \le f(y) - f(x).$$

Αποδειξη. Ας υποθεσουμε οτι $x < y$. Τοτε

$$\exists z \in (x,y) : f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Αφου η $f(x)$ ειναι κοιλη, η $f'(x)$ ειναι φθινουσα. Οποτε

$$z < y \Rightarrow f'(z) \geq f'(y)$$

και

$$f'(y) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

που δινει το ζητουμενο. Η περιπτωση $y < x$ αποδεικνυεται παρομοια.

4.1.13. Λημμα. Αποδειξε οτι: αν η $f(x)$ ειναι δις διαφορισιμη, κοιλη και φραγμενη, τοτε η $f(x)$ ειναι σταθερη.

Αποδειξη. Εστω οτι για καποιο $y \in \mathbb{R}$ εχουμε $f'(y) > 0$. Τοτε, απο το προηγουμενο προβλημα:

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R} &: f'(y)(y - x) \leq f(y) - f(x) \Rightarrow \\
\forall x, y \in \mathbb{R} &: f(x) \leq f(y) - f'(y)(y - x) \Rightarrow \\
\forall y \in \mathbb{R} &: \lim_{x \to -\infty} f(x) \leq \lim_{x \to -\infty} \left(f(y) - f'(y)(y - x)\right) = -\infty
\end{aligned}$$

Αλλα αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ η $f(x)$ δεν ειναι φραγμενη και οδηγηθηκαμε σε ατοπο. Με αναλογο τροπο δειχνουμε οτι η υποθεση οτι $(\exists y : f'(y) < 0)$ οδηγει σε ατοπο. Αρα

$$(\forall y \in \mathbb{R} : f'(y) = 0) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R} : f'(y) = c).$$

4.1.14. Θεωρημα: Το $\cos x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, \infty)$.

Λύση. Ξερουμε οτι η $\cos x$ ειναι δις διαφορισιμη. Απο την σχεση $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ βλεπουμε οτι ειναι και φραγμενη, και μαλιστα $|\cos x| \leq 1$. Εστω οτι

$$\forall x : \cos x > 0. \tag{4.7}$$

Τοτε, αφου $(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$, η $\cos x$ θα ειναι κοιλη οποτε (απο το προηγουμενο προβλημα) θα ειναι σταθερη. Δηλαδη θα εχουμε .

$$\forall x : \cos(x) = \cos(0) = 1 - \frac{0^2}{2!} + \frac{0^4}{4!} - \ldots = 1.$$

Αφου ομως $(\sin x)' = \cos x = 1 > 0$, τοτε η $\sin x$ θα ειναι γνησιως αυξουσα. Οποτε για καθε $x > 0$ θα εχουμε $\sin x > 0$. Και τοτε $(\cos x)' = -\sin x < 0$, δηλ. η $\cos x$ θα ειναι γνησιως φθινουσα στο $(0, \infty)$ – αλλα ειχαμε υποθεσει οτι η $\cos x$ ειναι σταθερα. Εν ολιγοις, η υποθεση (4.7) οδηγει σε ατοπο. Αρα θα υπαρχει $x_1 > 0$ τετοιο ωστε $\cos x_1 < 0$. Και τοτε, απο το Θεωρημα της Ενδιαμεσης Τιμης, θα υπαρχει και $x_2 \in (0, x_1)$ τετοιο ωστε $\cos x_2 = 0$. Αν τωρα θεωρησουμε το συνολο

$$A = \{x : x > 0 \text{ και } \cos(x) = 0\},$$

το A ειναι μη κενο και μπορουμε να ορισουμε

$$x_0 = \min A$$

δηλ. το x_0 ειναι η μικροτερη θετικη ριζα του $\cos(x)$. Οριζουμε τον αριθμο $\pi = 2x_0$, δηλ. με αλλα λογια, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $\frac{\pi}{2}$ ειναι η μικροτερη θετικη ριζα του $\cos x$.

4.1.15. Παρατηρηση: Στην πραγματικοτητα στην παραπανω αποδειξη υπαρχει ενα κενο[1]. Μπορεις να το βρεις;

4.1.16. Ορισμος: Έστω x_0 η μικρότερη αυστηρά θετική ρίζα του $\cos x$. Συμβολίζουμε με π την τιμη $\pi = 2x_0$.

4.1.17. Θεωρημα: $\sin(\pi) = 0$.
Αποδειξη. Έχουμε $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ οποτε και

$$\sin(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

4.1.18. Θεωρημα: $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$.
Αποδειξη. Έχουμε

$$0 = \sin(\pi) = \frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2i} = 0.$$

Άρα

$$1 = e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

οπότε $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$.

4.1.19. Θεωρημα: Οι συναρτήσεις $\cos(x)$, $\sin(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.
Αποδειξη. Παίρνουμε τυχόν $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cos 2\pi - \sin x\sin 2\pi = \cos x,$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x\cos 2\pi + \cos x\sin 2\pi = \sin x.$$

4.1.20. Θεωρημα: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(n\pi) = 0,$$
$$\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

4.1.21. Ασκηση: Αποδειξτε οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(n\pi) = 0. \tag{4.8}$$

Αποδειξη. Η αποδειξη ειναι επαγωγικη. Για $n = 0$ ισχυει οτι

$$\cos(0\pi) = \cos(0) = 1 = (-1)^0, \qquad \sin(0\pi) = \sin(0) = 0.$$

Εστω οτι η (4.8) ισχυει για $n = \{0, 1, 2, \ldots, 2k\}$. Τωρα

$$\cos((2k+1)\pi) = \cos(2k\pi)\cos(\pi) - \sin(2k\pi)\sin(\pi) = \cos(\pi) = -1 = (-1)^{2k+1},$$
$$\cos((2k+2)\pi) = \cos(2k\pi)\cos(2\pi) - \sin(2k\pi)\sin(2\pi) = \cos(2\pi) = 1 = (-1)^{2k+2},$$
$$\sin((2k+1)\pi) = \sin(2k\pi)\cos(\pi) + \cos(2k\pi)\sin(\pi) = 0,$$
$$\sin((2k+2)\pi) = \sin(2k\pi)\cos(2\pi) + \cos(2k\pi)\sin(2\pi) = 0.$$

Ετσι η επαγωγη ειναι πληρης και η αποδειξη εχει ολοκληρωθει.

[1] Μην ανησυχεις, μπορει να συμπληρωθει, ωστε η αποδειξη να ειναι αυστηρα σωστη.

4.1.22. Ορισμος: Ορίζουμε στο $(-\infty, \infty)$ τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \textit{εφαπτομένη}:\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \textit{συνεφαπτομένη}:\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \\ \textit{τέμνουσα}: \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \\ \textit{συντέμνουσα}:\ \csc x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

4.1.23. Θεωρημα: Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

4.1.24. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.
Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}} \\ &= \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \tan(x+y). \end{aligned}$$

4.1.25. Θεωρημα: Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos y \\ \cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

4.1.26. Ασκηση: Αποδειξε οτι

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned} \cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2\cos^2 x - 1 \\ &= \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

4.1.27. Θεωρημα: Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

4.1.28. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
Αποδειξη. Ειναι αμεση συνεπεια του $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

4.1.29. Θεωρημα: Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$$

4.1.30. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.
Αποδειξη. Εχουμε

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \sin x.$$

4.1.31. Θεωρημα: Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} 2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\ 2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ 2\sin x \cos y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \end{aligned}$$

4.1.32. Ασκηση: Αποδειξε οτι $2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$.
Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned} &\cos(x-y) + \cos(x+y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y + \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &= 2\cos x \cos y. \end{aligned}$$

4.1.33. Θεωρημα: Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x - \sin y &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

4.1.34. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
Αποδειξη. Θετουμε $A = \frac{x+y}{2}$, $B = \frac{x-y}{2}$. Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\ &= \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \\ &= \sin(x) + \sin(y). \end{aligned}$$

4.1.35. Θεωρημα: Για καθε $x\mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$

4.1.36. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.
Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} &= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\ &= \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x.\end{aligned}$$

4.1.37. Ορισμος: Οριζουμε τις *αντιστροφες τριγωνομετρικες συναρτησεις* ως εξης

$$\begin{aligned}&\forall x\in[-1,1]:\arcsin(x)=y\Leftrightarrow x=\sin(y),\\ &\forall x\in[-1,1]:\arccos(x)=y\Leftrightarrow x=\cos(y),\\ &\forall x\in(-\infty,\infty):\arctan(x)=y\Leftrightarrow x=\tan(y),\\ &\forall x\in(-\infty,\infty):\text{arccot}(x)=y\Leftrightarrow x=\cot(y),\\ &\forall x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty):\text{arcsec}(x)=y\Leftrightarrow x=\sec(y),\\ &\forall x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty):\text{arccsc}(x)=y\Leftrightarrow x=\csc(y).\end{aligned}$$

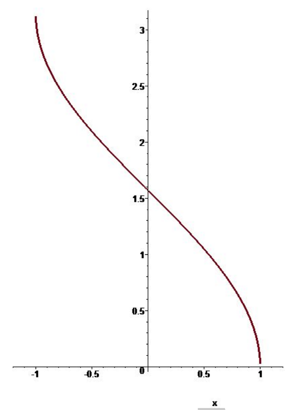
4.1.38. Θεωρημα: Για τις παραγωγους των αντιστροφων τριγωνομετρικων συναρτησεων ισχυουν τα εξης.

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ (\arctan x)' &= \frac{1}{x^2+1}\\ (\text{arccot}\, x)' &= -\frac{1}{x^2+1}\\ (\text{arcsec}\, x)' &= \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\ ,\\ (\text{arccsc}\, x)' &= -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}},\end{aligned}$$

4.1.39. Ασκηση: Αποδειξε οτι $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Αποδειξη. Θετουμε $y = \arcsin x$ οποτε $x = \sin y$ και $\sqrt{1-x^2} = \cos y$. Τοτε

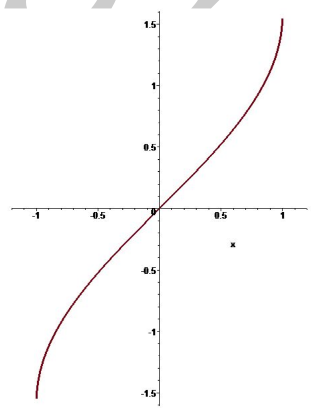
$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}\sin y = \cos y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.1.40. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $\arccos x$.
Λυση. Καταρχην παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arccos x$ ειναι το $[-1, 1]$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση της $\arccos x$ ειναι αυτη μιας *ημιπεριοδου* της $\cos x$ (γιατι;), καθρεφτισμενη γυρω απο την $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 4.1.



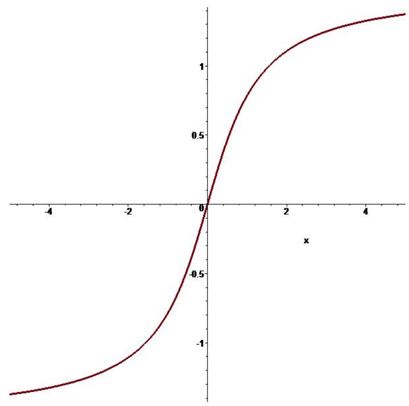
Σχ.4.1: Η γραφικη παρασταση της $\arccos x$.

4.1.41. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $\arcsin x$.
Λυση. Καταρχην παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arcsin x$ ειναι το $[-1, 1]$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση της $\arcsin x$ ειναι αυτη μιας *ημιπεριοδου* της $\sin x$ (γιατι;), καθρεφτισμενη γυρω απο την $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 4.2.



Σχ.4.2: Η γραφικη παρασταση της $\arcsin x$.

4.1.42. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $\arctan x$.
Λυση. Καταρχην παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arctan x$ ειναι το $(-\infty, \infty)$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση της $\arctan x$ ειναι αυτη της $\tan x$ (γιατι;), καθρεφτισμενη γυρω απο την $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 4.3.



Σχ.4.3: Η γραφικη παρασταση της $\arctan x$.

4.1.43. Θεωρημα: Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$
$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}.$$

4.1.44. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
Αποδειξη. Θετουμε $\phi_1 = \arcsin x \in [-\pi, \pi]$, $\phi_2 = \arccos x \in [0, 2\pi]$. Τοτε εχουμε

$$\sin \phi_1 = x = \cos \phi_2 \Leftrightarrow \phi_1 = \frac{\pi}{2} - \phi_2 \Leftrightarrow \phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

4.1.45. Θεωρημα: Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

4.1.46. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
Αποδειξη. Εχουμε $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$. Τοτε $\sin y = \sqrt{1-x^2}$ και

$$\sin(\arccos x) = \sin y = \sqrt{1-x^2}.$$

4.2 Λυμενα Προβληματα

4.2.1. Αποδειξε οτι $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\\ &= \frac{e^{i(x+y)}-e^{i(-x+y)}+e^{i(x-y)}-e^{-i(x+y)}}{4i}+\frac{e^{i(x+y)}+e^{i(-x+y)}-e^{i(x-y)}-e^{-i(x+y)}}{4i}\\ &= \frac{2e^{i(x+y)}-2e^{-i(x+y)}}{4i}=\sin(x+y).\end{aligned}$$

4.2.2. Ασκηση: Αποδειξτε οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχυει

$$\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{4.9}$$

Λυση. Η αποδειξη ειναι επαγωγικη. Για $n = 0$ ισχυει οτι

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Εστω οτι η (4.9) ισχυει για $n = \{0, 1, 2, \ldots, 2k\}$. Τωρα

$$\cos\left((2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos((2k+1)\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin((2k+1)\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Ετσι η επαγωγη ειναι πληρης και η αποδειξη εχει ολοκληρωθει.

4.2.3. Αποδειξε οτι $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
Λυση.

$$\begin{aligned}2\sin x\cos x &= 2\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ &= \frac{e^{ix+ix}-e^{-ix}e^{ix}+e^{ix-ix}-e^{-ix-ix}}{2i}\\ &= \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}=\sin 2x.\end{aligned}$$

4.2.4. Αποδειξε οτι $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}e^{i3x} &= (e^{ix})^3=(\cos x+i\sin x)^3\\ &= \cos^3 x+3\cos^2 x(i\sin x)+3\cos x(i\sin x)^2+(i\sin x)^3\\ &= \left(\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x\right)+i\left(3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x\right).\end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{gathered}\mathrm{Im}\left(e^{i3x}\right)=\mathrm{Im}(\cos 3x+i\sin 3x)=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x\Rightarrow\\ \sin 3x=3\left(1-\sin^2 x\right)\sin x-\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x.\end{gathered}$$

4.2.5. Αποδειξε οτι $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
Λυση. Ειναι αμεση συνεπεια του $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$.

4.2.6. Αποδειξε οτι $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.
Λυση. Εχουμε
$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} = \cos x.$$

4.2.7. Αποδειξε οτι $2\sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x-y)$.
Λυση. Εχουμε
$$\sin(x-y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2\sin x \cos y.$$

4.2.8. Αποδειξε οτι $\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
Λυση. Θετουμε $A = \frac{x+y}{2}$, $B = \frac{x-y}{2}$, οποτε
$$\begin{aligned} A + B &= x, \\ A - B &= y. \end{aligned}$$
Τοτε
$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B - (\sin A \cos B - \cos A \sin B) \\ &= 2\cos A \sin B = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

4.2.9. Αποδειξε οτι $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.
Λυση. Εχουμε
$$\begin{aligned} \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} &= \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\ &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos x. \end{aligned}$$

4.2.10. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\cdot x\right)$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^3+7e^x\right)\right)$.
3. $\frac{d}{dx}(\cot x)$.
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^3 x}{\ln x}\right)$.

Λυση. Εχουμε

1. $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\cdot x\right) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^3+7e^x\right)\right) = \left(\cos\left(7e^x+x^3\right)\right)\left(7e^x+3x^2\right)$.

3. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\cot^2 x - 1.$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^3 x}{\ln x}\right) = \frac{1}{4x\ln^2 x}\left(-12x\ln x\cos^3 x + 12x\ln x\cos x - 3\sin x + \sin 3x\right).$

4.2.11. Υπολογισε τα ορια

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.$

2. $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right).$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}.$

Λυση. Εχουμε

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}(\tan x)'}{\lim_{x\to 0}(x)'} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\tan^2 x+1\right)}{\lim_{x\to 0}(1)} = 1.$

2. $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\lim_{x\to 0}(1-x)'}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)'} = \frac{\lim_{x\to 0}(-1)}{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\frac{\pi}{\tan^2\frac{1}{2}\pi x}\left(\tan^2\frac{1}{2}\pi x+1\right)\right)} = \frac{2}{\pi}.$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\lim_{x\to 0}(1-\cos x)'}{\lim_{x\to 0}\left(x^2\right)'} = \frac{\lim_{x\to 0}(\sin x)}{\lim_{x\to 0}(2x)} = \frac{\lim_{x\to 0}(\cos x)}{\lim_{x\to 0}(2)} = \frac{1}{2}.$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2} = \frac{\lim_{x\to 0}(\tan x-\sin x)'}{\lim_{x\to 0}\left(x^2\right)'} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\tan^2 x+1-\cos x\right)}{\lim_{x\to 0}(2x)} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\tan^2 x+1-\cos x\right)'}{\lim_{x\to 0}(2x)'} = 0.$

4.2.12. Βρες προσεγγιστικα την τιμη του $\sin(1^0)$ χρησιμοποιωντας το διαφορικο. Το ιδιο και για την τιμη του $\cos(61^0)$ και του $\cos(44^0)$.
Λυση. Καταρχην τονιζουμε οτι στις τριγωνομετρικες συναρτησεις το ορισμα x μετραται σε *ακτινια*. Αρα πρεπει να μετατρεψουμε την 1^0 σε ακτινια. Εχουμε

$$\frac{x}{\pi} = \frac{1^0}{180^0} \Rightarrow x = 1.7453\times 10^{-2}.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}\sin\left(1^0\right) &= \sin\left(1.7453\times 10^{-2}\right) \approx \sin(0) + \sin'(0)\cdot 1.7453\times 10^{-2}\\ &= \sin(0) + \cos(0)\cdot 1.7453\times 10^{-2} \approx 1.7453\times 10^{-2}.\end{aligned}$$

Αντιστοιχα

$$\begin{aligned}\cos\left(61^0\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + 1.7453\times 10^{-2}\right) \approx \cos(\pi/3) - \sin(\pi/3)\cdot 1.7453\times 10^{-2}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1.7453\times 10^{-2} \approx 0.48489.\end{aligned}$$

Τελος

$$\begin{aligned}\cos\left(44^0\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.7453\times 10^{-2}\right) \approx \cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\cdot 1.7453\times 10^{-2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1.7453\times 10^{-2} \approx 0.69477.\end{aligned}$$

4.2.13. Αποδειξε οτι, για $x \in [0, \pi/2]$, ισχυει $\sin x \leq x$.
Λυση. Θετουμε $f(x) = \sin x - x$. Εχουμε

$$f'(x) = (\sin x - x)' = \cos x - 1.$$

Τοτε για καθε $x \in [0, \pi/2]$ εχουμε $f'(x) \leq 0$ και η $f(x)$ ειναι φθινουσα, οποτε

$$\forall x \in [0, \pi/2] : \sin x - x = f(x) \leq f(0) = 0 \Rightarrow \sin x \leq x.$$

4.2.14. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x) = \sin x + \cos x$.
Λυση. Παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x + \cos x &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Οποτε η $f(x)$ εχει μεγιστο το 1, στα σημεια $\overline{x}_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ και ελαχιστο το -1, στα σημεια $\widehat{x}_n = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}$ (οπου $n \in \mathbb{Z}$).

4.2.15. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.
Λυση. Εχουμε $f'(x) = \frac{d}{dx}(2\sin x + \cos 2x) = 2\cos x - 2\sin 2x$. Για να βρουμε τις ριζες της $f'(x)$ λυνουμε την

$$2\cos x - 2\sin 2x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin 2x$$

Οι λυσεις ειναι της μορφης

$$\begin{aligned} \overline{x}_k &= \frac{1}{2}\pi + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ \widehat{x}_k &= \frac{1}{6}\pi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ \widetilde{x}_k &= \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Η δευτερη παραγωγος ειναι

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(2\cos x - 2\sin 2x) = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

Οποτε εχουμε

$$\begin{aligned} f''(\overline{x}_k) &= -2\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \pi k\right) - 4\cos(\pi + 2k\pi) \\ &= \pm 2 + 4 > 0 \end{aligned}$$

το οποιο σημαινει οτι στα $\overline{x}_k$ εχουμε τοπικο ελαχιστο. Επισης

$$\begin{aligned} f''(\widehat{x}_k) &= -2\sin\left(\frac{1}{6}\pi + 2\pi k\right) - 4\cos\left(\frac{1}{3}\pi + 4\pi k\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) - 4\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) < 0 \end{aligned}$$

το οποιο σημαινει οτι στα $\widehat{x}_k$ εχουμε τοπικο μεγιστο. Τελος

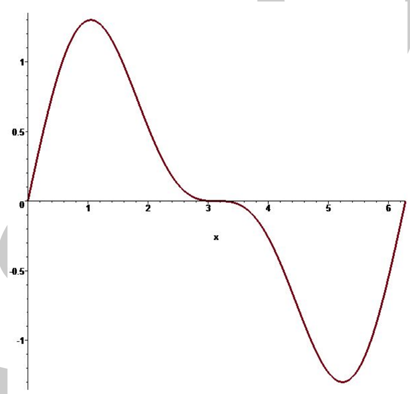
$$f''(\widetilde{x}_k) = -2\sin\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right) - 4\cos\left(\frac{5}{3}\pi + 4\pi k\right) = -2\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) - 4\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -3 < 0$$

το οποιο σημαινει οτι στα $\widetilde{x}_k$ εχουμε τοπικο μεγιστο.

4.2.16. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$.
Λυση. Προφανως η $f(x)$ εχει περιοδο 2π. Θα κανουμε την γραφικη παρασταση για το διαστημα $[0, 2\pi]$. Εχουμε $f'(x) = \cos x + \cos 2x$ με τρεις ριζες $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{3}$ στο διαστημα $[0, 2\pi]$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι ως εξης.

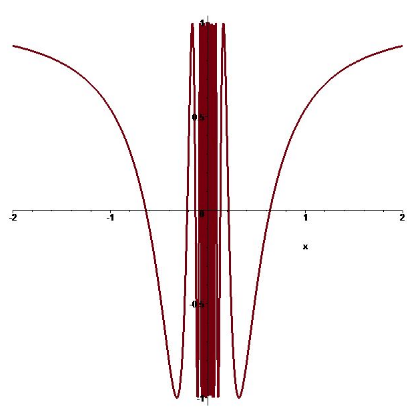
x	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$
$f'(x)$	θετικη	αρνητικη	αρνητικη	θετικη
$f(x)$	αυξουσα	φθινουσα	φθινουσα	αυξουσα

Κατα συνεπεια η γραφικη παρασταση εχει τη μορφη του Σχηματος 4.4.



Σχ.4.4: Η γραφικη παρασταση της $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$.

4.2.17. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Λυση. Προφανως η γραφικη παρασταση εχει την μορφη του Σχηματος 4.5.



Σχ.4.5: Η γραφικη παρασταση της $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4.2.18. Υπολογισε την $(\arcsin x)'$.
Λυση. Εχουμε

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,$$

Απο το οποιο εχουμε επισης $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Τωρα

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.2.19. Υπολογισε την $(\arctan x)'$.
Λυση. Εχουμε

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y,$$

Απο το οποιο εχουμε επισης $\cos y = \sqrt{1+x^2}$. Τωρα

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow (\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.2.20. Υπολογισε τις $\left(\arcsin^3 x\right)'$, $(\arcsin(x^3))'$, $(\ln(\arctan x))'$.
Λυση. Εχουμε

1. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin^3 x\right) = 3\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\frac{d}{dx}(\arcsin(x^3)) = 3\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.
3. $\frac{d}{dx}(\ln(\arctan x)) = \frac{1}{(\arctan x)\left(x^2+1\right)}$.

4.2.21. Υπολογισε το $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\sin x - x} &= \frac{\lim_{x\to 0}(\arctan x - x)'}{\lim_{x\to 0}(\sin x - x)'} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)'}{\lim_{x\to 0}(\cos x - 1)'}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)}{\lim_{x\to 0}(-\sin x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x} = 2.\end{aligned}$$

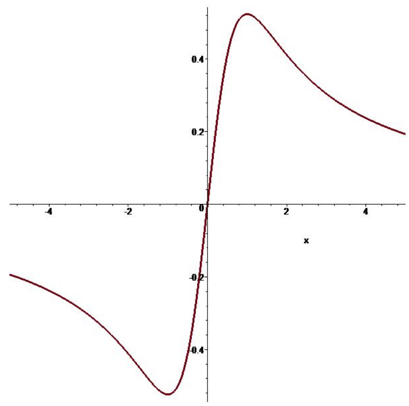
4.2.22. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \arcsin\frac{x}{1+x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Λυνοντας την εξισωση $f'(x) = 0$ βρισκουμε δυο ριζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι ως εξης.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	αρνητικη	θετικη	αρνητικη
$f(x)$	φθινουσα	αυξουσα	φθινουσα

Κατα συνεπεια η γραφικη παρασταση εχει τη μορφη του Σχηματος 4.6.



Σχ.4.6: Η γραφικη παρασταση της $\arcsin \dfrac{x}{1+x^2}$.

4.3 Αλυτα Προβληματα

4.3.1. Αποδειξε τους παρακατω τυπους.

1. $\sec x = \frac{\csc x}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$.
2. $\sec x = \frac{\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x}$.
3. $\csc x = \frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$.
4. $\csc x = \sqrt{1 + \cot^2 x}$.

4.3.2. Αποδειξε τους παρακατω τυπους.

1. $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.
2. $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

4.3.3. Αποδειξε τους παρακατω τυπους.

1. $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$.
2. $\arccos x + \arccos y = \arcsin\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$.
3. $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

4.3.4. Αποδειξε τους παρακατω τυπους.

1. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.
2. $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

4.3.5. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\cdot\sin x\right)$. *Απ.* $e^{x^2}(\cos x+2x\sin x)$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\tan\left(x^3+7e^x\right)\right)$. *Απ.* $\left(7e^x+3x^2\right)\left(\tan^2\left(7e^x+x^3\right)+1\right)$.
3. $\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{x}{x^2+1}\right)$. *Απ.* $\left(\cot^2\frac{x}{x^2+1}+1\right)\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$.
4. $\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\ln\left(x+1\right)\right)\right)$. *Απ.* $-\frac{\sin(\ln(x+1))}{x+1}$.
5. $\frac{d}{dx}\left(\sin^3\left(x^2+1\right)\right)$. *Απ.* $-6x\left(\cos\left(x^2+1\right)\right)\left(\frac{1}{2}\cos\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{2}\right)$.

4.3.6. Υπολογισε τα ορια

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{x^4}$. *Απ.* ∞.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^4}{x^2}$. *Απ.* 0.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ *Απ.* $-\frac{1}{2}$.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2-\sin x^2}{x^6}$. *Απ.* $\frac{1}{2}$.
5. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x}}{x}$. *Απ.* -1.

4.3.7. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου, χωρις χρηση υπολογιστη) την $\tan\left(46^0\right)$ και την $\tan\left(44^0\right)$. (*Απ.* 1.0354 και 0.96567).

4.3.8. Υπολογισε το $\sin\left(10^0\right)$ και την $\tan\left(5^0\right)$ με ακριβεια 10^{-3} χωρις χρηση υπολογιστη.

4.3.9. Εξετασε την συνεχεια της συναρτησης $f(x)=\cot\left(\frac{1}{x}\right)$.

4.3.10. Εξετασε την συνεχεια της συναρτησης $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

4.3.11. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ στο $[-\pi,\pi]$.

4.3.12. Κανε την γραφικη παρασταση της της $f(x)=\sin x\cos x$.

4.3.13. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x)=\sin x+\cos 2x$.

4.3.14. Βρες την $\frac{dy}{dx}$ οταν $y=f\left(\cos^2 x\right)+f\left(\sin^2 x\right)$.

4.3.15. Αποδειξε οτι $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ και $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{x^2+1}$.

4.3.16. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin^2 x\right)$. *Απ.* $2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin\left(x^3+1\right)\right)$. *Απ.* $3\frac{x^2}{\sqrt{-x^3\left(x^3+2\right)}}$.

3. $\frac{d}{dx}(\ln(\arccos x))$. *Απ.* $-\frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}$.

4.3.17. Υπολογισε το $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2-x^2}{\sin x-x}$. *Απ.* 0.

4.3.18. Δειξε οτι $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

4.3.19. Δειξε οτι $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\arctan x$.

4.3.20. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $\arctan y-y+x=0$.

4.3.21. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x)=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

4.3.22. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x)=\frac{1}{x}\arctan x$.

4.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

4.4.1. Αποδειξε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ χωρις χρηση του κανονα *l'Hospital*.

4.4.2. Αποδειξε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ χωρις χρηση του κανονα *l'Hospital*.

4.4.3. Αποδειξε οτι, για $x\in(0,\pi/2)$, ισχυει $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$.

4.4.4. Εστω οτι $x+y+z+u=\pi$. Αποδειξε οτι

$$\sin(x+y)\sin(x+u)=\sin x\sin z+\sin u\sin y=\sin(x+y)\sin(y+z).$$

4.4.5. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x)=\cos x-x$.

4.4.6. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

4.4.7. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x)=x\arctan\frac{1}{x}$.

4.4.8. Κανε την γραφικη παρασταση της

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin^2\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

4.4.9. Αποδειξε οτι η συναρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

δεν ειναι μονοτονη σε κανενα διαστημα $[a,b]$ με $a<0<b$.

4.4.10. Αποδειξε οτι η συναρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \left(2-\sin\frac{1}{x}\right)|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

εχει ελαχιστο στο $x=0$, αλλα δεν ειναι μονοτονη σε κανενα διαστημα $[a,b]$ με $0<a<b$ ή $a<b<0$.

4.4.11. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ στο $[-\pi, \pi]$.

4.4.12. Βρες μιά συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f''(x) + f(x) = 0$.

4.4.13. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ εχουμε $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.14. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ εχουμε $(\sin x)^{\sin x} > (\cos x)^{\cos x}$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.15. Δειξε οτι $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y)$.

4.4.16. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) = f(x) + f(y).$$

4.4.17. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}\right) = f(x) + f(y).$$

4.4.18. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f(x) + f(y).$$

4.4.19. Η εξισωση $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$ δεν εχει καμμια λυση. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.20. Δειξε οτι $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

4.4.21. Υπαρχει ακριβως μια συνεχης συναρτηση $x(y)$ η οποια ικανοποιει την εξισωση $x - \varepsilon \sin x = y$ (οπου $\varepsilon \in (0,1)$). Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.22. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Αποδειξε ότι: αν για κάποιο ϑ ισχύει $\sin\vartheta + \cos\vartheta \leq 0$, τότε ισχύει και $\sin^{2015}\vartheta + \cos^{2015}\vartheta \leq 0$. Ισχύει και $\sin^{2014}\vartheta + \cos^{2014}\vartheta \leq 0$;

4.4.23. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Αποδειξε ότι: αν η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \cos \kappa x$ είναι περιοδική, τότε $\kappa \in \mathbb{Q}$.

4.4.24. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Αποδειξε ότι: αν για κάποιο ϑ ο αριθμός $\sin\vartheta + \cos\vartheta$ είναι ρητός, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $\sin^n\vartheta + \cos^n\vartheta$ (για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

4.4.25. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Αποδειξε οτι $\cos(1^o) \in \mathbb{Q}$.

4.4.26. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Αν $\sin x \cos y = -\frac{1}{2}$ τι τιμες μπορει να παρει το $\cos x \sin y$;

4.4.27. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Ποια ειναι η μεγιστη τιμη του $(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x)$;

4.4.28. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Βρες ολα τα x για τα οποια $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\} = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$.

4.4.29. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Εστω τριγωνο με πλευρες a, b, c και απεναντι γωνιες A, B, C. Βρες τα x για τα οποια $a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \leq \frac{1}{2}(a^x + b^x + c^x)$.

4.4.30. (**Μαθ. Ολυμπιάδα**) Εστω τριγωνο με γωνιες A, B, C. Δειξε οτι

$$-2 \leq \sin(3A) + \sin(3B) + \sin(3C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ποτε ισχυουν οι ισοτητες;

Κεφάλαιο 5

Υπερβολικες Συναρτησεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται παρόμοια με τις τριγωνομετρικές και έχουν πολλές ανάλογες ιδιότητες.

5.1 Θεωρια και Παραδειγματα

5.1.1. Ορισμος: Οριζουμε στο $(-\infty,\infty)$ τις *υπερβολικες συναρτησεις* (κατ' αντιστοιχια των τριγωνομετρικων):

$$
\begin{aligned}
\textit{Υπερβολικο συνημιτονο}: \cosh x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\\
\textit{Υπερβολικο ημιτονο}: \sinh x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
\textit{Υπερβολικη εφαπτομενη}: \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x},\\
\textit{Υπερβολικη συνεφαπτομενη}: \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x},\\
\textit{Υπερβολικη τεμνουσα}: \sec hx &= \frac{1}{\cosh x}\\
\textit{Υπερβολικη συντεμνουσα}: \operatorname{csc}hx &= \frac{1}{\sinh x}.
\end{aligned}
$$

5.1.2. Θεωρημα:Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$
\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}, & \cosh(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2},\\
\tanh(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, & \coth(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\\
\sec h(x) &= \frac{2}{e^x+e^{-x}}, & \csc h(x) &= \frac{2}{e^x-e^{-x}}.
\end{aligned}
$$

5.1.3. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Λυση. Εχουμε

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Με προσθεση καταμελη παιρνουμε

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots .$$

5.1.4. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\cosh^2(x) - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{2+2}{4} = 1.$$

5.1.5. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$.

5.1.6. Ασκηση: Αποδειξε οτι $(\cosh(x))' = \sinh x$.
Λυση. Εχουμε

$$(\cosh(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

5.1.7. Θεωρημα: Για καθε $x \in \mathbb{R}$: $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$.

5.1.8. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sinh(-x) = -\sinh x$.
Λυση. Εχουμε $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$.

5.1.9. Θεωρημα: Οι συναρτήσεις $\cosh x$, $\sinh x$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $(-\infty, \infty)$.
Αποδειξη. Προκυπτει αμεσα απο το οτι $(\cosh(x))' = \sinh x$, $(\sinh(x))' = \cosh x$.

5.1.10. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $\cosh x$.
Λυση. Εχουμε

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} \geq 1.$$

Η ελαχιστη τιμη της $\cosh x$ ειναι το $\cosh 0 = 1$. Επισης φαινεται αμεσα οτι

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh x = \infty.$$

Επειδη

$$(\cosh x)' = \sinh x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

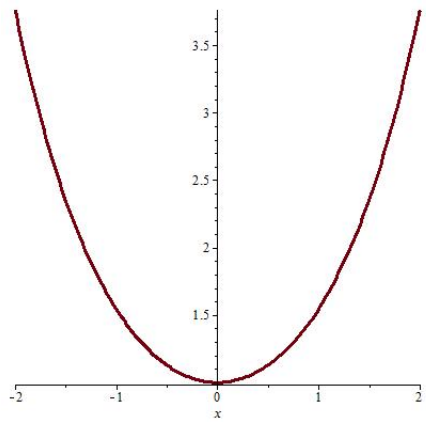
εχουμε

$$x < 0 \Rightarrow \sinh x < 0,$$
$$x > 0 \Rightarrow \sinh x > 0.$$

Οποτε η $\cosh x$ ειναι φθινουσα στο $(-\infty, 0)$ και αυξουσα στο $(0, \infty)$. Επειδη για καθε x

$$(\cosh x)'' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

βλεπουμε οτι η $\cosh x$ ειναι κυρτη στο $(-\infty, \infty)$. Χρησιμοποιωντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.1.



Σχ.5.1: Η γραφικη παρασταση της $\cosh x$.

5.1.11. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $\sinh x$.
Λυση. Επειδη $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, εχουμε

$$x < 0 \Rightarrow \sinh x < 0,$$
$$x > 0 \Rightarrow \sinh x > 0.$$

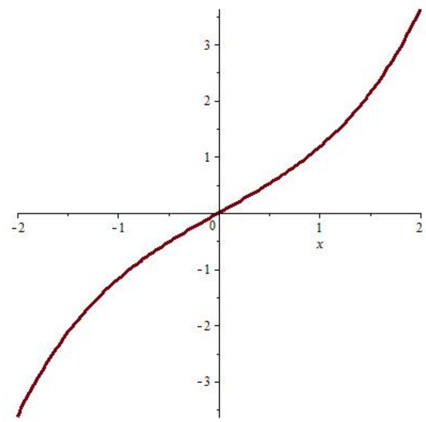
Επισης φαινεται αμεσα οτι

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \sinh x = \infty.$$

Επειδη για καθε $x \in (-\infty, \infty)$ εχουμε

$$(\sinh x)' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

βλεπουμε οτι η $\sinh x$ ειναι αυξουσα στο $(-\infty, \infty)$. Επειδη $(\sinh x)'' = \sinh x$, βλεπουμε οτι η $\sinh x$ ειναι κοιλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτη στο $(0, \infty)$. Χρησιμοποιωντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.2.



Σχ.5.2: Η γραφικη παρασταση της $\sinh x$.

5.1.12. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $\tanh x$.
Λυση. Εχουμε

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Οποτε

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Με αντιστοιχο τροπο βρισκουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

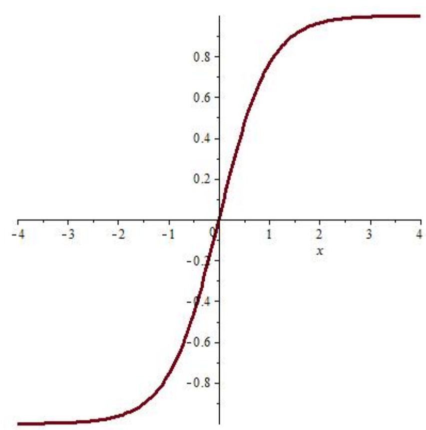
Επισης φαινεται ευκολα οτι η μονη ριζα της $\tanh x = 0$ ειναι η $x = 0$. Εχουμε

$$(\tanh x)' = \frac{4e^{-2x}}{(e^{-2x}+1)^2} > 0$$

οποτε η $\tanh x$ ειναι αυξουσα στο $(-\infty, \infty)$. Τελος

$$(\tanh x)'' = \frac{(e^{-2x}-1)\,8e^{-2x}}{(e^{-2x}+1)^3}$$

οποτε η $\tanh x$ ειναι κυρτη στο $(-\infty, 0)$ και κοιλη στο $(0, \infty)$. Χρησιμοποιωντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.3.



Σχ.5.3: Η γραφικη παρασταση της $\tanh x$.

5.1.13. Θεωρημα: Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y
\end{aligned}$$

5.1.14. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&+ \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

5.1.15. Θεωρημα: Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}, \qquad \tan(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

5.1.16. Ασκηση: Αποδειξε οτι: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} &= \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{\sinh y}{\cosh y}}{1 + \frac{\sinh x}{\cosh x}\frac{\sinh y}{\cosh y}} = \frac{\frac{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y}}{\frac{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} \\
&= \frac{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \tanh(x+y).
\end{aligned}$$

5.1.17. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned}
&\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1 \\
&\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x
\end{aligned}$$

5.1.18. Ασκηση: Αποδειξε οτι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1.$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\cosh 2x &= \cosh(x+x) = \cosh x \cosh x + \sinh x \sinh x \\
&= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= \cosh^2 x + \cosh^2 x - 1 = 2\cosh^2 x - 1 \\
&= 1 + \sinh^2 x + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1.
\end{aligned}$$

5.1.19. Θεωρημα: Οι παρακατω τυποι *αποτετραγωνισμου* ειναι χρησιμη στον υπολογισμο ολοκληρωματων.

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}.$$

5.1.20. Ασκηση: Αποδειξε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}.$$

Λυση. Προκυπτει αμεσα απο το $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$.

5.1.21. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}, \qquad \sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}.$$

5.1.22. Ασκηση: Αποδειξε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1+\tanh^2 x}}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} \\ &= \frac{|\cosh x|}{\sqrt{\cosh^2 x - \sinh^2 x}} = \frac{|\cosh x|}{1} = \cosh x. \end{aligned}$$

5.1.23. Θεωρημα: Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} 2\cosh x \cosh y &= \cosh(x + y) + \cosh(x - y) \\ 2\sinh x \sinh y &= \cosh(x + y) - \cosh(x - y) \\ 2\sinh x \cosh y &= \sinh(x + y) + \sinh(x - y) \end{aligned}$$

5.1.24. Ασκηση: Αποδειξε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$2\cosh x \cosh y = \cosh(x + y) + \cosh(x - y).$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} &\cosh(x + y) + \cosh(x - y) \\ &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\ &= 2\cosh x \cosh y. \end{aligned}$$

5.1.25. Θεωρημα: Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \sinh x + \sinh y &= 2\sinh\left(\frac{x + y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x - y}{2}\right) \\ \sinh x - \sinh y &= 2\sinh\left(\frac{x - y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ \cosh x + \cosh y &= 2\cosh\left(\frac{x + y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x - y}{2}\right) \\ \cosh x - \cosh y &= 2\sinh\left(\frac{x + y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x - y}{2}\right) \end{aligned}$$

5.1.26. Αποδειξε οτι $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Λυση. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right) &= 2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} \\
&= \frac{e^{\frac{x+y+x-y}{2}}-e^{\frac{-x-y+x-y}{2}}+e^{\frac{x+y-x+y}{2}}-e^{\frac{-x-y-x+y}{2}}}{2} \\
&= \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+\frac{e^{-y}-e^{y}}{2} = \sinh x + \sinh y.
\end{aligned}
$$

5.1.27. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$
\sinh x = \frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}, \qquad \cosh x = \frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}.
$$

5.1.28. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυουν:

$$
\sinh\frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{\sqrt{2\cosh x+1}}, \qquad \cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x+1}{2}}.
$$

5.1.29. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sinh x = \frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1+\tanh^2\frac{x}{2}}$.

Λυση. Εχουμε

$$
\frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}}{1-\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\cosh\frac{x}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} = \frac{\sinh x}{1} = \sinh x.
$$

5.1.30. Θεωρημα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$
\begin{aligned}
\cosh(ix) &= \cos x, & \sinh(ix) &= i\sin x, \\
\cos(ix) &= \cosh x, & \sin(ix) &= i\sinh x.
\end{aligned}
$$

5.1.31. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\sinh(ix) = i\sin x$, $\cosh(ix) = \cos x$.

Λυση. Εχουμε

$$
\cosh(ix) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x
$$

και

$$
\sinh(ix) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = i\sin x.
$$

5.1.32. Ορισμος: Οριζουμε τις *αντιστροφες υπερβολικες συναρτησεις* ως εξης

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty,\infty) : y = arc\sinh(x) \Leftrightarrow x = \sinh(y), \\
&\forall x \in [1,\infty) : y = arc\cosh(x) \Leftrightarrow x = \cosh(y), \\
&\forall x \in (-1,1) : y = arc\tanh(x) \Leftrightarrow x = \tanh(y), \\
&\forall x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty) : y = arc\coth(x) \Leftrightarrow x = \coth(y), \\
&\forall x \in (0,1] : y = arc\sec h(x) \Leftrightarrow x = \sec h(y), \\
&\forall x \in (-\infty,0)\cup(0,\infty) : y = arc\csc h(x) \Leftrightarrow x = \csc h(y).
\end{aligned}
$$

5.1.33. Θεωρημα: Για τις παραγωγους των αντιστροφων υπερβολικων συναρτησεων ισχυουν τα εξης.

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arcsin} hx)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \\
(\operatorname{arccos} hx)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ (για } x > 1), \\
(\operatorname{arctan} hx)' &= \frac{1}{1-x^2}, \\
(\operatorname{arccot} hx)' &= \frac{1}{1-x^2} \\
(\operatorname{arcsec} hx)' &= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \text{ (για } 0 < x < 1) , \\
(\operatorname{arccsc} hx)' &= -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}
$$

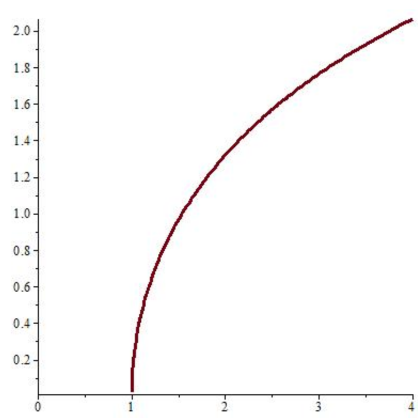
5.1.34. Ασκηση: Αποδειξε οτι $(\operatorname{arcsin} hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Λυση. Εστω $y = \operatorname{arcsin} hx$, τοτε $x = \sinh y$, $\sqrt{x^2+1} = \cosh y$. Οποτε

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= (\sinh y)' = \cosh y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \\
(\operatorname{arcsin} hx)' = \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}
$$

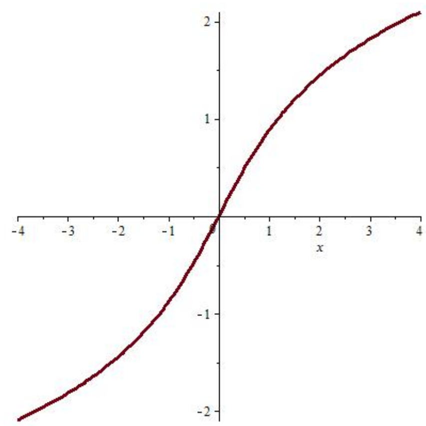
5.1.35. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $f(x) = \operatorname{arccos} hx$.

Λυση. Καταρχην παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\operatorname{arccos} hx$ ειναι το $(1,\infty)$. Η πρωτη παραγωγος ειναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ και η δευτερη παραγωγος ειναι $f''(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} < 0$. Οποτε, για καθε $x \in (1,\infty)$, η $\operatorname{arccos} hx$ ειναι αυξουσα και κοιλη. Τελος, $f(1) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση εχει την μορφη που φαινεται στο Σχημα 5.4.



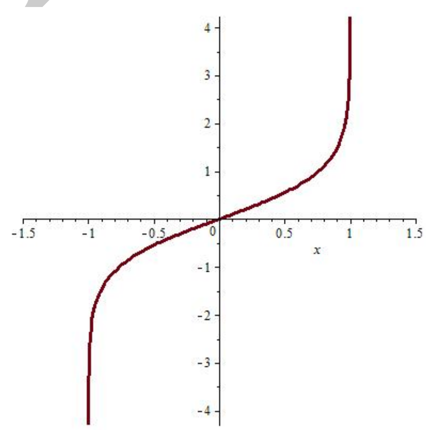
Σχ.5.4: Η γραφικη παρασταση της $\operatorname{arccos} hx$.

5.1.36. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $f(x) = \arcsin hx$.
Λυση. Καταρχην παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arcsin hx$ ειναι το $(-\infty, \infty)$. Η πρωτη παραγωγος ειναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ οποτε, για καθε $x \in (-\infty, \infty)$, η $\arcsin hx$ ειναι αυξουσα. Η δευτερη παραγωγος ειναι $f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, οποτε για $x \in (-\infty, 0)$, η $\arcsin hx$ ειναι κυρτη και για $x \in (0, \infty)$, η $\arcsin hx$ ειναι κοιλη. Τελος, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση εχει την μορφη που φαινεται στο Σχημα 5.5.



Σχ.5.5: Η γραφικη παρασταση της $\arcsin hx$.

5.1.37. Ασκηση: Σχεδιασε την συναρτηση $\arctan hx$.
Λυση. Αφου η $\arctan hx$ ειναι η αντιστροφη της $\tanh x$, το πεδιο ορισμου της ειναι το $[-1, 1]$ και η γραφικη παρασταση της $\arctan hx$ ειναι αυτη της $\tanh x$ καθρεφιτσμενη απο την ευθεια $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 5.6.



Σχ.5.6: Η γραφικη παρασταση της $\arctan hx$.

5.1.38. Θεωρημα: Ισχυουν τα εξης:

$$\forall x \in (-\infty, \infty) : arcsinh\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \tag{5.1}$$

$$\forall x \in [1, \infty) : arccosh\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \tag{5.2}$$

$$\forall x \in (-1, 1) : arctanh(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \tag{5.3}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : arccoth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \tag{5.4}$$

$$\forall x \in (0, 1] : arcsech(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \tag{5.5}$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) : arccsch(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right). \tag{5.6}$$

5.1.39. Ασκηση: Αποδειξε οτι $arcsinh\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
Λυση. Εστω $z = arc\sinh(x)$. Τοτε

$$x = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \Rightarrow e^z - 2x - e^{-z} = 0.$$

Θετουμε $a = e^z$, οποτε εχουμε $a - 2x - a^{-1} = 0$ και πολλαπλασιαζουμε με a, οποτε παιρνουμε

$$a^2 - 2xa - 1 = 0.$$

Λυνουμε ως προς a και παιρνουμε

$$e^z = a = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Αλλα η ριζα $a = x - \sqrt{x^2+1}$ ειναι αρνητικη και απορριπτεται (αφου $a = e^z > 0$). Οποτε

$$a = e^z = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$
$$arc\sinh(x) = z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

5.1.40. Θεωρημα: Ισχυουν τα εξης:

$$\arcsin(x) = -i\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right),$$
$$\arccos(x) = -i\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$
$$\arctan(x) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right).$$

5.2 Λυμενα Προβληματα

5.2.1. Αποδειξε οτι $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Λυση. Εχουμε

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Με αφαιρεση κατα μελη παιρνουμε

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

5.2.2. Αποδειξε οτι $(\sinh x)' = \cosh x$.
Λυση. Εχουμε

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Το $(\sinh(x))' = \cosh x$ αποδεικνυεται παρομοια.

5.2.3. Αποδειξε οτι $\cosh(-x) = \cosh x$.
Λυση. Εχουμε $\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$.

5.2.4. Αποδειξε οτι $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4} = \cosh(x+y).\end{aligned}$$

5.2.5. Αποδειξε οτι: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y} &= \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\sinh y}{\cosh y}}{1 - \frac{\sinh x}{\cosh x}\frac{\sinh y}{\cosh y}} = \frac{\frac{\sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y}}{\frac{\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} \\ &= \frac{\sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y} = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh(x-y)} = \tanh(x-y).\end{aligned}$$

5.2.6. Αποδειξε οτι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$.
Λυση. Εχουμε

$$\sinh 2x = \sinh(x+x) = \cosh x \sinh x + \cosh x \sinh x = 2\sinh x \cosh x.$$

5.2.7. Αποδειξε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
Λυση. Προκυπτει αμεσα απο το $\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$.

5.2.8. Αποδειξε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} &= \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} = \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{\sqrt{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} \\ &= \frac{|\cosh x| \frac{\sinh x}{\cosh x}}{\sqrt{\cosh^2 x - \sinh^2 x}} = \sinh x.\end{aligned}$$

5.2.9. Αποδειξε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$2\sinh x \cosh y = \sinh(x+y) + \sinh(x-y).$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}&\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\\&= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y\\&= 2\sinh x \cosh y.\end{aligned}$$

5.2.10. Αποδειξε οτι $\sinh x - \sinh y = 2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 2\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\\&= \frac{e^{\frac{x-y+x+y}{2}} - e^{\frac{-x+y+x+y}{2}} + e^{\frac{x-y-x-y}{2}} + e^{\frac{-x+y-x-y}{2}}}{2}\\&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} - \frac{e^{2y}-e^{-2y}}{2} = \sinh x - \sinh y.\end{aligned}$$

5.2.11. Αποδειξε οτι $\cosh x = \frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{1-\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} = \frac{\cosh x}{1} = \cosh x.$$

5.2.12. Αποδειξε οτι $\cos(ix) = \cosh x$, $\sin(ix) = i\sinh x$.
Λυση. Εχουμε

$$\cos(ix) = \frac{e^{iix}+e^{-iix}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x$$

και

$$\sin(ix) = \frac{e^{iix}-e^{-iix}}{2i} = -i\frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = i\sinh x.$$

5.2.13. Αποδειξε οτι $(\arccos hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (για $x > 1$).
Λυση. Εστω $y = \arccos hx$, τοτε $x = \cosh y$, $\sqrt{x^2-1} = \sinh y > 0$. Οποτε

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= (\cosh y)' = \sinh y = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow\\(\arccos hx)' &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

5.2.14. Υπολογισε τις παραγωγους των $\sinh(x^2+1)$, $\cosh\frac{x-1}{x+1}$, $\tanh(\sin(x^2+1))$, $\frac{\sinh(x+1)}{\cosh\left(x^2-2\right)}$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\sinh\left(x^2+1\right)\right)' &= 2x\cosh\left(x^2+1\right),\\
\left(\cosh\frac{x-1}{x+1}\right)' &= 2\frac{\sinh\frac{x-1}{x+1}}{(x+1)^2},\\
\left(\tanh\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)\right)' &= 2x\left(\cos\left(x^2+1\right)\right)\left(1-\tanh^2\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)\right),\\
\left(\frac{\sinh(x+1)}{\cosh(x^2-2)}\right)' &= \frac{(\cosh(x^2-x-3)+\cosh(x^2+x-1)-2x\cosh(x^2+x-1)+2x\cosh(x^2-x-3))}{2\cosh^2(x^2-2)}
\end{aligned}$$

5.2.15. Υπολογισε τα $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\cos x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x^2}{\sin x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{1+e^{-x}}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sinh x}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\cos x} &= \frac{\sinh 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0,\\
\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x^2}{\sin x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cosh x^2}{2x\cos x^2} = \frac{1}{1} = 1,\\
\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{1+e^{-x}} &= \frac{\tanh 0}{1+e^0} = 0,\\
\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sinh x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}} == \lim_{x\to\infty}2\left(\frac{1}{1+e^{-2x}}\right) = 2.
\end{aligned}$$

5.2.16. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)=\sinh(x^2)$.
Λυση. Εχουμε $f'(x) = 2x\cosh x^2$ το οποιο ειναι αρνητικο στο $(-\infty,0)$, θετικο στο $(0,\infty)$ και $f'(0)=0$. Αρα η $f(x)$ ειναι φθινουσα στο $(-\infty,0)$, αυξουσα στο $(0,\infty)$ και εχει τοπικο ελαχιστο στο $x_0=0$.

5.2.17. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)=\tanh(x^2+1)$.
Λυση. Εχουμε

$$f'(x) = 2x\left(1-\tanh^2\left(x^2+1\right)\right).$$

Αφου για καθε $z\in(-\infty,\infty)$ ισχυει $|\tanh(z)|\le 1$, εχουμε

$$\begin{aligned}
x<0 &\Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x) \text{ φθινουσα},\\
x>0 &\Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x) \text{ αυξουσα}.
\end{aligned}$$

Στο $x_0=0$ εχουμε $f'(x_0)=0$. Οποτε στο $x_0=0$ εχουμε τοπικο ελαχιστο.

5.2.18. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x)=\cosh\frac{x}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\cosh\frac{x}{x^2+1} = 1, \lim_{x\to\infty}\cosh\frac{x}{x^2+1} = 1.$$

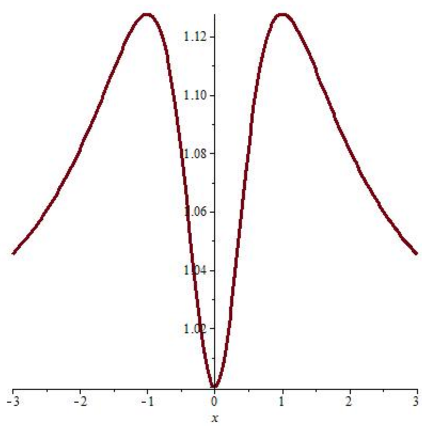
Επισης εχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cosh\frac{x}{x^2+1} = \left(\sinh\frac{x}{x^2+1}\right)\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Θετοντας $f'(x) = 0$ παιρνουμε τις ριζες $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι η εξης

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	θετικη	αρνητικη	θετικη	αρνητικη
$f(x)$	αυξουσα	φθινουσα	αυξουσα	φθινουσα

Συνδυαζοντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.7.



Σχ.5.7: Η γραφικη παρασταση της $\cosh \dfrac{x}{x^2+1}$.

5.2.19. Υπολογισε τις παραγωγους των $\arcsin h\,(x^2+1)$, $\arctan h\,(x^2+1)$, $\arccos h \frac{x-1}{x+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{d}{dx}\arcsin h\left(x^2+1\right) = \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)^2+1}},$$
$$\frac{d}{dx}\arctan h\left(x^2+1\right) = \frac{2x}{1-(x^2+1)^2},$$
$$\frac{d}{dx}\arccos h\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-1}}.$$

5.2.20. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = \arcsin h\left(x+\frac{1}{x}\right)$.
Λυση. Εχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\arcsin h\left(x+\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Θετοντας $f'(x) = 0$ παιρνουμε τις ριζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι η εξης

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	θετικη	αρνητικη	αρνητικη
$f(x)$	αυξουσα	φθινουσα	φθινουσα

Αρα εχουμε τοπικο μεγιστο στο $x_1 = -1$ και τοπικο ελαχιστο στο $x_2 = 1$.

5.2.21. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \operatorname{arccos} h\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$.

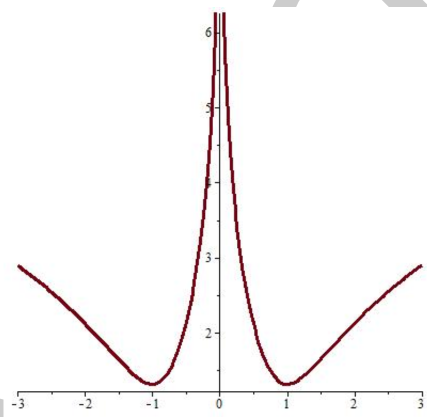
Λυση. Εχουμε $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccos} h\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty$. Επισης εχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \operatorname{arccos} h\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}} \frac{x^4 - 1}{x^3}.$$

Θετοντας $f'(x) = 0$ παιρνουμε τις ριζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι η εξης

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	αρνητικη	θετικη	αρνητικη	θετικη
$f(x)$	φθινουσα	αυξουσα	φθινουσα	αυξουσα

Αρα εχουμε τοπικα ελαχιστα στα $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Συνδυαζοντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.8.



Σχ.5.8: Η γραφικη παρασταση της $\operatorname{arccos} h\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$.

5.2.22. Αποδειξε οτι

$$\arcsin(x) = -i \ln\left(ix + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

Λυση. Εστω $z = \arcsin(x)$. Τοτε

$$x = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow e^{iz} - 2ix - e^{-iz} = 0.$$

Θετουμε $a = e^{iz}$, οποτε εχουμε $a - 2ix - a^{-1} = 0$ και πολλαπλασιαζουμε με a, οποτε παιρνουμε

$$a^2 - 2ixa - 1 = 0.$$

Λυνουμε ως προς a και παιρνουμε

$$e^{iz} = a = ix \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Υποθετουμε οτι $a = ix + \sqrt{1 - x^2}$ οποτε

$$a = e^{iz} = ix + \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \arcsin x = z = -i \ln\left(ix + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

Εδω αξιζει να σημειωθει οτι θα μπορεσουμε εξισου δικαιολογημενα να υποθεσουμε οτι $a = ix - \sqrt{1-x^2}$ και τοτε θα παιρναμε $\arcsin x = -i \ln\left(-ix + \sqrt{1-x^2}\right)$. Η αληθεια ειναι οτι η συναρτηση $\arcsin x$ ειναι *πλειοτιμη*, δηλ. σε καθε x_1 αντιστοιχουν περισσοτερες της μιας τιμες $\arcsin x_1$. Το ζητημα της πλειοτιμιας εξεταζεται σε βαθος στην Θεωρια Μιγαδικων Συναρτησεων.

5.3 Αλυτα Προβληματα

5.3.1. Αποδειξε οτι

1. $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$,
2. $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$.

5.3.2. Αποδειξε οτι

1. $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$,
2. $\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$.

5.3.3. Αποδειξε οτι $2\sinh x \sinh y = \cosh(x+y) - \cosh(x-y)$.

5.3.4. Αποδειξε οτι

1. $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
2. $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

5.3.5. Αποδειξε οτι $1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$.

5.3.6. Αποδειξε οτι

1. $(\tanh(x))' = \sec h^2(x)$,
2. $(\coth(x))' = -\csc h^2(x)$,
3. $(\sec h(x))' = -\sec h(x) \cdot \tanh(x)$,
4. $(\csc h(x))' = -\csc h(x) \cdot \coth(x)$.

5.3.7. Σχεδιασε την συναρτηση $\tanh\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$.

5.3.8. Σχεδιασε την συναρτηση $\cosh(\sinh(x))$.

5.3.9. Σχεδιασε την συναρτηση $\tanh(\frac{x^2+1}{x^2})$.

5.3.10. Σχεδιασε την συναρτηση $\tanh(\frac{x^2+1}{x^2})$.

5.3.11. Αποδειξε οτι

1. $(arc\tanh(x))' = \frac{1}{1-x^2}$,
2. $(arc\coth(x))' = \frac{1}{1-x^2}$,
3. $(arc\sec h(x))' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$,
4. $(arc\csc h(x))' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$.

5.3.12. Σχεδιασε την συναρτηση $\operatorname{arccot} hx$.

5.3.13. Σχεδιασε την συναρτηση $\operatorname{arcsec} hx$.

5.3.14. Σχεδιασε την συναρτηση $\operatorname{arccsc} hx$.

5.3.15. Αποδειξε οτι

1. $arc\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $(1 \leq x)$,
2. $arc\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $(-1 < x < 1)$,
3. $arc\coth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $(x > 1$ η $x < -1)$,
4. $arc\sec h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$
5. $arc\csc h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$.

5.3.16. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}(\ln(\cosh 5x))$. *Απ.* $\frac{\sinh 5x}{\cosh 5x}$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\cosh x - 1}\right)$. *Απ.* $\frac{1}{2}\frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh x-1}}$.
3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sinh^2 5x}\right)$. *Απ.* $\frac{5\sqrt{2}\sinh 10x}{2\sqrt{\cosh 10x+1}}$.
4. $\frac{d}{dx}(\sinh(x^3))$. *Απ.* $3x^2\cosh x^3$.

5.3.17. Υπολογισε τα ορια.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}$. *Απ.* 1.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x}$. *Απ.* 1.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\sin x}$. *Απ.* 1.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{\cos x}$. *Απ.* 1.

5.3.18. Υπολογισε τις παραγωγους

1. $\frac{d}{dx}(\arctan(\tanh x))$. *Απ.* $-\frac{\tanh^2 x-1}{\tanh^2 x+1}$.

2. $\frac{d}{dx}(\cosh(\sinh x))$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sinh(\sinh x - x) + \frac{1}{2}\sinh(x + \sinh x)$.

3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\tanh^2 x}\right)$. *Απ.* $-(\tanh x)\frac{\tanh^2 x-1}{\sqrt{\tanh^2 x+1}}$.

4. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}\right)$. *Απ.* $-\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{\tanh x-1}(\tanh x+1)}(\tanh x-1)}(\tanh x+1)$.

5.3.19. Σχεδιασε την συναρτηση $\arccos h(\sinh x))$.

5.3.20. Σχεδιασε την συναρτηση $\cosh(\arcsin hx)$.

5.3.21. Σχεδιασε την συναρτηση $\arctan h(\frac{x}{x^4+1})$.

5.3.22. Δειξε οτι οι συναρτησεις $\frac{e^{2x}}{2}$, $e^x \sinh x$ και $e^x \cosh x$ διαφερουν κατα μια σταθερα.

5.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

5.4.1. Αποδειξε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{2x} = \frac{1}{2}$ χωρις χρηση του κανονα *l'Hospital*.

5.4.2. Αποδειξε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2} = \frac{1}{2}$ και $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2} = 0$ χωρις χρηση του κανονα *l'Hospital*.

5.4.3. Αποδειξε οτι, για $x > 0$, ισχυει $\sinh x > x + \frac{x^3}{6}$. Τι μπορεις να πεις για το $\sinh x$ οταν $x < 0$;

5.4.4. Αποδειξε οτι $\arcsin(\tanh x) = \arctan(\sinh x)$.

5.4.5. Αποδειξε οτι

$$\arccos(x) = -i\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$
$$\arctan(x) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right).$$

5.4.6. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x) = \cosh x - x$.

5.4.7. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x\arctan h\frac{1}{x}$.

5.4.8. Βρες τα *ολικα* μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = \cosh x - \sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ για $N = 1, 2, 3, 4$.

5.4.9. Βρες μιά συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f''(x) + f(x) = 0$.

5.4.10. Βρες *ολες* τις συναρτησεις $f(x)$ τετοιες ώστε $f''(x) - f(x) = 0$.

5.4.11. Βρες *ολα* τα ζευγη συναρτησεων $(f(x), g(x))$ τετοια ώστε

$$f'(x) - g(x) = 0,$$
$$g'(x) - f(x) = 0.$$

5.4.12. Αποδειξε οτι $\cosh(y-z) + \cosh(z-x) + \cosh(x-y) \geq \cosh x + \cosh y + \cosh z$.

5.4.13. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right) = f(x) + f(y).$$

5.4.14. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right) = f(x) + f(y).$$

5.4.15. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y).$$

5.4.16. Εστω ϕ και Φ οι ριζες της εξισωσης $x^2 - x - 1 = 0$. Τοτε $\sinh(\ln\phi) = \frac{1}{2}$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρωμα

Η ολοκληρωση ειναι η *αντιστροφη* διαδικασια της παραγωγισης. Στο παρον κεφαλαιο παρουσιαζουμε τον ορισμο και τις βασικες ιδιοτητες του ολοκληρωματος.

6.1 Θεωρια και Παραδειγματα

6.1.1. Ορισμος: Εστω δυο συναρτησεις $f(x)$ και $F(x)$. Λεμε οτι η συναρτηση $F(x)$ ειναι *ενα αοριστο ολοκληρωμα* της συναρτησης $f(x)$ ανν ισχυει

$$F'(x) = f(x) \tag{6.1}$$

και τοτε γραφουμε ισοδυναμα

$$F(x) = \int f(x)dx. \tag{6.2}$$

6.1.2. Παραδειγμα: Ισχυει

$$\int e^x dx = e^x$$

διοτι $(e^x)' = e^x$.

6.1.3. Παρατηρηση: Οι εκφρασεις «η $F(x)$ ειναι *παραγουσα* της $f(x)$» και «η $F(x)$ ειναι *αντιπαραγωγος* της $f(x)$» ειναι ισοδυναμες προς την «η $F(x)$ ειναι το αοριστο ολοκληρωμα της $f(x)$».

6.1.4. Παρατηρηση: Το αοριστο ολοκληρωμα της $f(x)$ δεν είναι μοναδικό. Πράγματι, εάν η $F_1(x)$ είναι τέτοια ώστε $F_1'(x) = f(x)$ τότε και η $F_2(x) = F_1(x) + c$ (όπου η c είναι μια αυθαίρετη σταθερά) επίσης ικανοποιεί $F_2'(x) = f(x)$. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $f(x)$ έχει άπειρο αριθμό αορίστων ολοκληρωμάτων (γι΄ αυτο και χρησιμοποιουμε τον ορο *αοριστο* ολοκληρωμα).

6.1.5. Παραδειγμα: Ισχυει

$$\int \cos x dx = \sin x$$

διοτι $(\sin x)' = \cos x$. Ισχυει επισης

$$\int \cos x dx = \sin x + 66$$

διοτι $(\sin x + 66)' = \cos x$.

6.1.6. Θεωρημα: Το αοριστο ολοκληρωμα εχει τις εξης ιδιοτητες

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,$$
$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx,$$
$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

6.1.7. Παρατηρηση: Το c σε ολες τις παραπανω εκφρασεις ειναι μια *αυθαιρετη* σταθερα, σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση.

6.1.8. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\int f'(x)dx = f(x) + c$.
Λυση. Ισχυει διοτι $(f(x) + c)' = f'(x) + 0 = f'(x)$.

6.1.9. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\int (f(x) + g(x))\, dx = f(x) + g(x) + c$.
Λυση. Ισχυει διοτι $(f(x) + g(x) + c)' = f'(x) + g'(x) + 0 = f'(x) + g'(x)$.

6.1.10. Θεωρημα: Τα παρακατω ειναι *βασικα* αοριστα ολοκληρωματα.

$$\int 1dx = x + c,$$
$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \qquad (m \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x dx = \sin x + c$$
$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$
$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$
$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$
$$\int \tanh x dx = \ln|\cosh x| + c$$

6.1.11. Ασκηση: Υπολογιστε το $\int x^2 dx$.
Λυση. Ειναι $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$.

6.1.12. Θεωρημα: Αλλα σημαντικα αοριστα ολοκληρωματα ειναι τα εξης.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c\\
&\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c\\
&\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+c\\
&\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c\\
&\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \arccos h(\frac{x}{a})+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c\\
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \arcsin h(\frac{x}{a})+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c
\end{aligned}
$$

6.1.13. Ασκηση: Υπολογισε το $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.
Λυση. Θετοντας $a=2$, εχουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{2})+c.$$

6.1.14. Θεωρημα: Αλλα σημαντικα αοριστα ολοκληρωματα ειναι τα εξης.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c\\
&\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c\\
&\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c\\
&\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin h\left(\frac{x}{a}\right)+c\\
&\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\arccos h\left(\frac{x}{a}\right)+c\\
&\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c\\
&\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c
\end{aligned}
$$

6.1.15. Ασκηση: Υπολογισε το $\int \sqrt{9-x^2}dx$.
Λυση. Θετοντας $a=3$, εχουμε

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \int \sqrt{3^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{9}\right)+c.$$

6.1.16. Ασκηση: Υπολογισε το $\int \sqrt{4+9x^2}dx$.

Λυση. Εχουμε

$$\int \sqrt{4^2+9x^2}dx = 3\int \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + x^2}dx$$
$$= \frac{8}{27}\ln\left(x+\frac{1}{9}\sqrt{81x^2+16}\right)+\frac{1}{6}x\sqrt{81x^2+16}+c.$$

6.1.17. Θεωρημα (Ολοκληρωση με Αντικατασταση): Εστω $f(x)$ συνεχης συναρτηση και $g(x)$ διαφορισιμη συναρτηση. Τοτε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left(\int f(u)du\right)_{u=g(x)} + c. \tag{6.3}$$

Αποδειξη. Εστω οτι $F(u) = \int f(u)du$. Τοτε, απο τον κανονα αλυσωτης παραγωγισης εχουμε

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\,g'(x)$$

που ειναι ισοδυναμο με το

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x))\,g'(x)\,dx. \tag{6.4}$$

Αλλα

$$F(u) = \int f(u)du \Rightarrow F(g(x)) = \left(\int f(u)du\right)_{u=g(x)}. \tag{6.5}$$

Συνδυαζοντας τις (6.4)-(6.5) παιρνουμε το ζητουμενο:

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = \left(\int f(u)du\right)_{u=g(x)} + c.$$

6.1.18. Παρατηρηση: Η παραπανω ιδιοτητα ειναι εξαιρετικα χρησιμη για τον υπολογισμο αοριστων ολοκληρωματων, οπως θα φανει απο τα παρακατω παραδειγματα.

6.1.19. Παραδειγμα: Για να υπολογισουμε το $\int\left(\sqrt{x^3+1}\right)3x^2dx$ δουλευουμε ως εξης. Θετουμε $u(x) = x^3+1$, $f(u) = \sqrt{u}$ και παρατηρουμε οτι $u'(x) = 3x^2$ και οτι

$$\left(\sqrt{x^3+1}\right)3x^2 = f(u(x))\,u'(x).$$

Οποτε

$$\int\left(\sqrt{x^3+1}\right)3x^2dx = \int f(u(x))\,u'(x)\,dx$$
$$= \int f(u)\,du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2\left(x^3+1\right)^{3/2}}{3} + c.$$

6.1.20. Παρατηρηση: Συνηθως θα ειναι πιο ευκολο να δουλευουμε με τον συμβολισμο $\frac{du}{dx}$ αντι του $u'(x)$. Με αυτο τον συμβολισμο η βασικη ιδιοτητα γραφεται

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du.$$

Το δε προηγουμενο παραδειγμα γραφεται ως εξης: $u = x^3 + 1$, $f(u) = \sqrt{u}$ και παρατηρουμε οτι $\frac{du}{dx} = 3x^2$ και

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2\left(x^3+1\right)^{3/2}}{3} + c.$$

6.1.21. Ασκηση: Υπολογισε το $\int \sin\left(x^3+1\right)3x^2dx$.
Λυση. Θετουμε $u = x^3 + 1$, $\frac{du}{dx} = 3x^2$ και

$$\begin{aligned}\int \sin\left(x^3+1\right)3x^2dx &= \int \sin(u)\frac{du}{dx}dx = \int \sin(u)\,du\\ &= -\cos(u) + c = -\cos\left(x^3+1\right) + c\end{aligned}$$

6.1.22. Ασκηση: Υπολογισε το $\int \cos^5 x \sin x dx$.
Λυση. Θετουμε $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$, οποτε

$$\int \cos^5 x \sin x dx = -\int u^5 du = -\frac{1}{6}u^6 = -\frac{1}{6}\cos^6 x.$$

6.1.23. Παρατηρηση: Μερικες χρησιμες αντικαταστασεις ειναι οι εξης.

1. Για μορφη $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\tan(u)$ και παιρνω $a\sqrt{1+\tan^2(u)} = \frac{a}{\cos(u)}$.
2. Για μορφη $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\sin(u)$ και παιρνω $a\sqrt{1-\sin^2(z)} = a\cos(u)$.
3. Για μορφη $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos(u)}$ και παιρνω $a\sqrt{\frac{1}{\sin^2(u)}-1} = a\tan(u)$.
4. Για μορφη $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\cosh(u)$ και παιρνω $a\sqrt{\cosh^2(u)-1} = a\sinh(u)$.

6.1.24. Θεωρημα (Παραγοντικη Ολοκληρωση): Εστω $f(x)$, $g(x)$ παραγωγισιμες συναρτησεις.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{6.6}$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= \int (f(x)g(x))'\,dx\\ &= \int \left[f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\right]dx\\ &= \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

απο το οποιο προκυπτει η ζητουμενη (6.6).

6.1.25. Παρατηρηση: Η παραπανω ιδιοτητα ειναι εξαιρετικα χρησιμη για τον υπολογισμο αοριστων ολοκλρωματων, οπως θα φανει απο τα παρακατω παραδειγματα.

6.1.26. Ασκηση: Υπολογισε το $\int xe^x dx$.
Λυση. Θετοντας $f = e^x$, $g = x$, εχουμε

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

6.1.27. Ασκηση: Υπολογισε το $\int x \cos x dx$.
Λυση. Θετοντας $f = \sin x$, $g = x$, εχουμε

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

6.1.28. Ασκηση: Υπολογισε το $\int x \sin x dx$.
Λυση. Θετοντας $f = -\cos x$, $g = x$, εχουμε

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

6.1.29. Παρατηρηση: Συνηθως θα ειναι πιο ευκολο να δουλευουμε με τον συμβολισμο $\frac{du}{dx}$ αντι του $u'(x)$. Με αυτο τον συμβολισμο ο τυπος της παραγοντικης ολοκληρωσης γραφεται

$$\int f(x)\, dg = fg - \int g(x)\, df.$$

Η «αποδειξη» ειναι η εξης:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \Rightarrow d(fg) = gdf + fdg \Rightarrow fg = \int d(fg) = \int gdf + \int fdg.$$

6.1.30. Ορισμος: Με τον ορο «*στοιχειωδες κλασμα*» εννοουμε οποιοδηποτε απο τα παρακατω

$$\frac{A}{x-x_0}, \qquad \frac{A}{(x-x_0)^2}, \qquad \ldots \tag{6.7}$$

$$\frac{A}{ax^2+bx+c}, \qquad \frac{A}{(ax^2+bx+c)^2}, \qquad \ldots \tag{6.8}$$

$$\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}, \qquad \frac{Ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}, \qquad \ldots. \tag{6.9}$$

Προσοχη: Οταν στις (6.8) και (6.9) $b^2 - 4ac \geq 0$ αναγομαστε στην (6.7). Αρα μας ενδιαφερει η περιπτωση $b^2 - 4ac < 0$.

6.1.31. Παρατηρηση: Μπορουμε να υπολογισουμε το ολοκληρωμα *καθε* στοιχειωδους κλασματος. Δινουμε μερικα παραδειγματα (παρακατω θετουμε $E = \sqrt{4ac - b^2}$):

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{A}{x - x_0} dx = A \ln |x - x_1| \, , \\
&\int \frac{A}{(x - x_0)^2} dx = -\frac{A}{x - x_0}, \\
&\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2A}{E} \arctan \frac{2ax + b}{E}, \\
&\int \frac{A}{(ax^2 + bx + c)^2} dx = \frac{A\,(2ax + b)}{E^2\,(ax^2 + bx + c)} + \frac{4Aa}{E^3} \arctan \frac{2ax + b}{E}, \\
&\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \ln\left(ax^2 + bx + c\right) + \frac{2B}{E}\left(\arctan \frac{2ax + b}{E}\right) - \frac{A}{E} \cdot \frac{b}{a}\left(\arctan \frac{2ax + b}{E}\right).
\end{aligned}
$$

6.1.32. Ορισμος: Η συναρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ λεγεται *ρητη* ανν τα $P(x)$ και $Q(x)$ ειναι πολυωνυμα.

6.1.33. Παρατηρηση: Μπορούμε να υπολογισουμε το ολοκληρωμα καθε ρητης συναρτησης με αναγωγη αυτης σε αθροισμα στοιχειωδων κλασματων. Ας υποθεσουμε οτι στην ρητη συναρτηση $P(x)/Q(x)$ ο βαθμος του $P(x)$ ειναι μικροτερος απο τον βαθμο του $Q(x)$. Εστω μια ριζα x_0 του $Q(x)$. Διακρινουμε τις εξης περιπτωσεις.

1. Αν η ριζα ειναι πραγματικη και απλη, τοτε στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται *ενα* κλασμα της μορφης
$$\frac{A}{x - x_0}.$$
2. Αν η ριζα ειναι πραγματικη και πολλαπλοτητας n, τοτε στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζονται n κλασματα της μορφης
$$\frac{A_1}{x - x_0}, \quad \frac{A_2}{(x - x_0)^2}, \ldots, \frac{A_n}{(x - x_0)^n}.$$
3. Αν η ριζα x_0 ειναι μιγαδικη και απλη, τοτε η συζυγης $\overline{x}_0$ ειναι επισης ριζα του $Q(x)$ και το γινομενο $(x - x_0)(x - \overline{x}_0)$ θα ισουται με $ax^2 + bx + c$ οπου τα a, b, c θα ειναι πραγματικοι αριθμοι. Στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται *ενα* κλασμα της μορφης
$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$
4. Τελος, αν η ριζα x_0 ειναι μιγαδικη και πολλαπλοτητας n, στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται n κλασματα της μορφης
$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}, \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^2}, \ldots, \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Ετσι, οποιαδηποτε ρητη συναρτηση $f(x)$ με βαθμο του $P(x)$ μικροτερο απο αυτο του $Q(x)$ μπορει να ολοκληρωθει με αναπτυξη σε στοιχειωδη κλασματα. Αν πάλι ο βαθμος του $P(x)$ ειναι μεγαλυτερος του βαθμου του $Q(x)$, με πολυωνυμικη διαιρεση παιρνουμε
$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

οπου τα $P_1(x)$, $P_2(x)$ ειναι πολυωνυμα και ο βαθμος του $P_2(x)$ μικροτερος απο αυτο του $Q(x)$. Ετσι μπορουμε και παλι να ολοκληρωσουμε την $f(x)$.

6.1.34. Ασκηση: Υπολογισε το $\int \frac{1}{x^2-1}dx$.

Λυση. Θετουμε

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)\cdot x + (A-B)}{x^2-1}.$$

Αρα

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}\right\}$$

και εχουμε

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$$

6.1.35. Ασκηση: Υπολογισε το $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

απο το οποιο προκυπτει το συστημα

$$\begin{aligned} A+C&=1 \\ A+B+D&=1 \\ A+B+C&=0 \\ B+D&=0 \end{aligned}$$

με λυση, $A=1, B=0, C=-1, D=0$, δηλ.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx &= \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

6.1.36. Ορισμος: Εστω μια συναρτηση $f(x)$ ορισμενη σε ενα $X \subseteq \mathbb{R}$. Εστω ενα $a, b \in X$ τετοια ωστε η $f(x)$ να ειναι *συνεχης* στο κλειστο διαστημα με ακρα τα a, b. Το *ορισμενο ολοκληρωμα* της $f(x)$ συμβολιζεται ως $\int_a^b f(x)$ και οριζεται ως εξης:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

οπου $F(x)$ ειναι οποιαδηποτε συναρτηση ικανοποιει $F'(x) = f(x)$ (ισοδυναμα $F(x) = \int f(x)\,dx$).

6.1.37. Παρατηρηση: Προσεξε οτι *αναγκαια συνθηκη* για τον ορισμο του $\int_a^b f(x)\,dx$ ειναι η συνεχεια της $f(x)$ στο κλειστο διαστημα με ακρα τα a, b.

6.1.38. Ασκηση: Υπολογισε το $\int_1^2 xdx$.
Λυση. Ξερουμε οτι

$$F(x) = \frac{x^2}{2} = \int xdx.$$

Θετοντας $a = 1$, $b = 2$, παιρνουμε

$$\int_1^2 xdx = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

6.1.39. Συμβολισμος: Στον υπολογισμο του ορισμενου ολοκληρωματος, πολλες φορες θα γραφουμε $F(x)|_{x=a}^{x=b}$ ως συντομογραφια του $F(b) - F(a)$.

6.1.40. Ασκηση: Υπολογισε το $\int_0^{\pi/2} \cos xdx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^{\pi/2} \cos xdx = \sin(x)|_{x=0}^{x=\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

6.1.41. Θεωρημα: Το ορισμενο ολοκληρωμα (σε αντιθεση με το αοριστο) της $f(x)$ ειναι μοναδικο.
Αποδειξη. Έστω

$$F_1(x) = \int f(x)\,dx, \qquad F_2(x) = \int f(x)\,dx,$$

δύο αόριστα ολοκληρώματα της $f(x)$. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x) = f(x) \\ F_2'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + c.$$

Μπορούμε να ορίσουμε

$$I_1 = \int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a), \qquad I_2 = \int_a^b f(x)\,dx = F_2(b) - F_2(a).$$

Αλλα

$$I_1 = F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + c - F_2(a) - c = F_2(b) - F_2(a) = I_2.$$

6.1.42. Θεωρημα: Το ορισμενο ολολκληρωμα εχει τις εξης ιδιοτητες.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{6.10}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{6.11}$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \tag{6.12}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \tag{6.13}$$

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx \tag{6.14}$$

6.1.43. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
Λυση. Εστω $F(x) = \int f(x)\,dx$, ενα αοριστο ολοκληρωμα της $f(x)$. Τοτε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

6.1.44. Ασκηση: Αποδειξε οτι $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.
Λυση. Εστω $F(x) = \int f(x)\,dx$, ενα αοριστο ολοκληρωμα της $f(x)$. Τοτε

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx.$$

6.1.45. Θεωρημα (Μεσης Τιμης): Εστω οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$. Τοτε υπαρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_0)$.
Αποδειξη . Εστω $F(x) = \int f(x)\,dx$. Τοτε $F'(x) = f(x)$. Αφου η $f(x)$ ειναι συνεχης (αρα και καλως ορισμενη) στο $[a,b]$, η $F(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο $[a,b]$, Τοτε απο το Θεωρημα Μεσης Τιμης του Κεφαλαιου 2 ξερουμε οτι υπαρχει $x_0 \in (a,b)$ τετοιο ωστε

$$F'(x_0) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \Rightarrow$$
$$f(x_0) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_0).$$

6.1.46. Θεωρημα: Οριζουμε την συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$. Η $F(x)$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και $\frac{dF}{du} = f(x)$.
Αποδειξη . Εχουμε

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du}{\Delta x}. \tag{6.15}$$

Απο το Θεωρημα Μεσης Τιμης γνωριζουμε οτι υπαρχει $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ τετοιο ωστε

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = (x + \Delta x - x)f(\xi) = f(\xi)\,\Delta x.$$

Αντικαθιστωντας στην (6.15) παιρνουμε

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Τωρα

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$$

αφου για καθε Δx ισχυει $x \le \xi \le x + \Delta x$. Ετσι εχουμε αποδειξει οτι $\frac{dF}{dx} = f(x)$, αρα η $F(x)$ ειναι παραγωγισιμη αρα και συνεχης.

6.1.47. Θεωρημα: Το ορισμενο ολοκληρωμα εχει τις εξης ιδιοτητες.

$$(\forall x \in [a, b] : 0 \leq f(x)) \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)dx \tag{6.16}$$

$$(\forall x \in [a, b] : g(x) \leq f(x)) \Rightarrow \int_a^b g(x)d \leq \int_a^b f(x)dx \tag{6.17}$$

$$(\forall x \in [a, b] : A \leq f(x) \leq B) \Rightarrow A \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B \cdot (b - a) \tag{6.18}$$

6.1.48. Ασκηση: Αποδειξε οτι

$$(\forall x \in [a, b] : g(x) \leq f(x)) \Rightarrow \int_a^b g(x)d \leq \int_a^b f(x)dx$$

Αποδειξη . Θετουμε

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du - \int_a^x g(u)\,du = \int_a^x (f(u) - g(u))\,du.$$

Ξερουμε οτι

$$\forall x \in [a, b] : H'(x) = f(x) - g(x) \geq 0.$$

Αρα η $H(x)$ ειναι αυξουσα στο $[a, b]$. Αφου

$$H(a) = \int_a^a (f(u) - g(u))\,du = 0,$$

συμπεραινουμε οτι

$$\forall x \in [a, b] : H(x) \geq H(0) = 0$$

και συγκεκριμενα

$$\int_a^b f(u)\,du - \int_a^b g(u)\,du = H(b) \geq 0$$

οποτε η αποδειξη εχει ολοκληρωθει.

6.1.49. Ορισμος: *Γενικευμενα Ολοκληρωματα 1ου τυπου* ειναι αυτα οπου ενα η και τα δυο ορια ολοκληρωσης ειναι απειρα.

1. Οταν το $a = -\infty$ και το $b < \infty$ *οριζουμε* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to-\infty} \int_u^b f(x)dx$.
2. Οταν το $-\infty < a$ και το $b = \infty$ *οριζουμε* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)dx$.
3. Οταν το $a = -\infty$ και το $b = \infty$ τοτε *οριζουμε*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to-\infty} \int_u^c f(x)dx + \lim_{v\to\infty} \int_c^v f(x)dx,$$

οπου το c μπορει να ειναι οποιοσδηποτε αριθμος που ανηκει στο $\mathbb{R}$.

6.1.50. Ασκηση: Υπολογισε το $\int_1^\infty \frac{dx}{(4x+1)(4x+3)}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{(4x+1)(4x+3)} &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\int_1^M \left(\frac{1}{4x+1} - \frac{1}{4x+3}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{M\to\infty} \left[\frac{1}{4}\ln|4x+1| - \frac{1}{4}\ln|4x+3|\right]_{x=1}^{x=M} dx \\
&= \frac{1}{8}\lim_{M\to\infty} \left(\ln\frac{4M+1}{4M+3} - \ln\frac{5}{7}\right) = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{7}{5}\right).
\end{aligned}$$

6.1.51. Ασκηση: Υπολογισε το $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-2x+5}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-2x+5} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\
&= \lim_{M\to-\infty}\int_M^0 \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\
&= \lim_{M\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{M-1}{2} + \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{M-1}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

6.1.52. Ορισμος: *Γενικευμενα Ολοκληρωματα 2ου τυπου* ειναι αυτα οπου η ολοκληρωτεα συναρτηση παρουσιαζει καποια ασυνεχεια στο διαστημα ολοκληρωσης.

1. Εστω οτι η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει ασυνεχεια στο a· τοτε
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$
2. Εστω οτι η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει ασυνεχεια στο b· τοτε
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$
3. Εστω οτι υπαρχει c με $a<c<b$ και στο οποιο η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει. Τοτε μπορουμε να ορισουμε
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to0^+}\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx.$$
Σημειωστε οτι το παραπανω αποτελεσμα μπορει να ειναι *διαφορετικο* απο το
$$\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right).$$

6.1.53. Ασκηση: Υπολογισε το $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Λυση. Με απλη ολοκληρωση θα παιρναμε

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{x=0}^{x=2} = 0.$$

Αλλα αυτο ειναι λαθος. Στο σημειο $x = 1$ η $\frac{1}{(x-1)^2}$ ειναι ασυνεχης και απαιτειται η χρηση γενικευμενου ολοκληρωματος. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{x=0}^{x=1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{1-\varepsilon-1} + \frac{1}{0-1}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\varepsilon-1}\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \infty.\end{aligned}$$

6.1.54. Ασκηση: Υπολογισε το $\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.
Λυση. Υπαρχει ασυνεχεια στο $x = 1$. Οποτε

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= 3\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[(x-1)^{1/3}\right]_{x=-1}^{x=1-\varepsilon} + 3\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[(x-1)^{1/3}\right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} \\ &= 3\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\varepsilon^{1/3} - (-2)^{1/3}\right] + 3\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[1^{1/3} - \varepsilon^{1/3}\right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} = 3\left(\sqrt[3]{2} + 1\right).\end{aligned}$$

6.2 Λυμενα Προβληματα

6.2.1. Αποδειξε οτι $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$.
Λυση. Πραγματι $\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)' = \frac{1}{2}2x + 0 = x$.

6.2.2. Αποδειξε οτι $\int \cos x dx = \sin x + c$.
Λυση. Πραγματι $(\sin x + c)' = \cos x + 0 = \cos x$.

6.2.3. Αποδειξε τις παρακάτω ιδιότητες.

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \tag{6.19}$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx \tag{6.20}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \tag{6.21}$$

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du. \tag{6.22}$$

Λυση. Η (6.19) ισχύει εξ ορισμού. Για την (6.20): $(c \cdot F(x))' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$, δηλ. η $c \cdot F(x)$ ειναι το ολοκληρωμα της $c \cdot f(x)$. Για την (6.21): $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$. Η (6.22) ειναι στην ουσια μια εναλλακτικη διατυπωση του κανονα της *αλυσσωτης παραγωγισησ:* $[f(u(x))]' = f'(u)\, u'(x)$.

6.2.4. Υπολογισε το $\int x^4 dx$ και επαληθευσε την απάντηση.
Λυση. Έχουμε $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + c$. Παρατηρούμε δε ότι $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5 + c\right) = x^4$.

6.2.5. Υπολογισε το $\int (2 - 5\sin x + e^x)\, dx$ και επαληθευσε την απάντηση.
Λυση. Έχουμε

$$\int (2 - 5\sin x + e^x)\, dx = \int 2dx - 5\int \sin x dx + \int e^x dx = 2x + 5\cos x + e^x + c.$$

Παρατηρούμε δε ότι $\frac{d}{dx}(2x + 5\cos x + e^x + c) = e^x - 5\sin x + 2$.

6.2.6. Υπολογισε το $\int \frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx$ και επαληθευσε την απάντηση.
Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{2x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx &= \int 2x^{1/2} dx + \int dx + \int x^{-1/2} dx \\ &= 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + x + \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{4}{3}x^{3/2} + x + 2x^{1/2} + c.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε δε ότι $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{3/2} + x + 2x^{1/2} + c\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2x + \sqrt{x} + 1\right)$.

6.2.7. Υπολογισε το $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$ και επαληθεύστε την απάντηση.
Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx &= \int \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{1/2}}}dx = \int \sqrt{x\sqrt{x^{3/2}}}dx \\ &= \int \sqrt{x \cdot x^{3/4}}dx = \int x^{7/8} dx = \frac{8}{15}x^{15/8} + c.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε δε ότι $\frac{d}{dx}\left(\frac{8}{15}x^{15/8} + c\right) = x^{\frac{7}{8}} \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

6.2.8. Υπολογισε το $\int \frac{2x+\frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$ και επαληθεύστε την απάντηση.
Λυση. Εχουμε

$$\int \frac{2x + \frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{2}{3}\int \frac{x}{x^{2/3}} dx + \frac{1}{5}\int \frac{x^{1/2}}{x^{2/3}} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{5}x^{5/6} = \frac{1}{2}x^{4/3} + \frac{6}{25}x^{5/6} + c.$$

Παρατηρούμε δε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{4/3} + \frac{6}{25}x^{5/6} + c\right) = \frac{1}{15\sqrt[6]{x}}\left(10\sqrt{x} + 3\right) = \frac{2x + \frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

6.2.9. Υπολογισε το $\int\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \sqrt[3]{x}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \sqrt[3]{x}dx &= \int\left(x-2x^{1/2}+1\right)\cdot x^{1/3}dx \\ &= \int\left(x^{4/3}-2x^{2/3}+x^{1/3}\right)dx = \frac{3}{7}x^{7/3}-\frac{6}{5}x^{5/3}+\frac{3}{4}x^{4/3}+c.\end{aligned}$$

6.2.10. Υπολογισε το $\int \cot^2 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int dx = -\cot x - x + c.$$

6.2.11. Υπολογισε το $\int (1-2x)^{100}\, dx$.
Λυση. Θετοντας $u=1-2x$, $du=-2dx$ εχουμε

$$\int (1-2x)^{100}\, dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{100}\, d(1-2x) = -\frac{1}{202}u^{101}+c = -\frac{1}{202}(1-2x)^{101}+c.$$

6.2.12. Υπολογισε το $\int \sqrt{16-x^2}dx$.
Λυση. Θετουμε $\sin u = \frac{x}{4}$, $\cos u du = \frac{dx}{4}$. Τοτε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{16-x^2}dx &= 4\int \sqrt{1-\sin^2 x}4\cos u du = 16\int \cos^2 u du = 16\int \frac{1+\cos 2u}{2}du \\ &= 8\int du + 8\int \cos 2u du = 8u + 4\sin(2u).\end{aligned}$$

Τωρα, $u=\arcsin\frac{x}{4}$. Επισης, $\sin(2u) = 2\sin u\cos u = 2\frac{x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$. Οποτε τελικα

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = 8\arcsin\frac{x}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+c.$$

6.2.13. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{3x^2-8x+5}$.
Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνου εχουμε

$$3x^2-8x+5 = 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{3}.$$

Οποτε (με $u=x-\frac{4}{3}$) εχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x^2-8x+5} &= \int \frac{du}{3u^2-\frac{1}{3}} = \int \frac{\frac{1}{3}}{u^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}du = \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{3u-1}-\frac{1}{3u+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|u-\frac{1}{3}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|u+\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x-5}{3x-3}\right|+c\end{aligned}$$

6.2.14. Υπολογισε το $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx$.
Λυση. Με τον μετασχηματισμο $u = e^x$, $du = e^x dx$ εχουμε

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}du = \int\left(\frac{2}{1-u}-\frac{1}{u}\right)du = -2\ln|1-u| + \ln|u|$$
$$= -2\ln|1-e^x| + \ln e^x = -2\ln|1-e^x| + x + c.$$

6.2.15. Υπολογισε το $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+1}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \frac{2x-7}{x^2-7x+1}dx = \int \frac{(x^2-7x+1)'}{x^2-7x+1}dx == \int \frac{d\left(x^2-7x+1\right)}{x^2-7x+1} = \ln\left|x^2-7x+1\right| + c.$$

6.2.16. Υπολογισε το $\int \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{(x^2)'\sin x - x^2(\sin x)'}{\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)'dx = \frac{x^2}{\sin x} + c$$

6.2.17. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x)}$.
Λυση. Θετουμε $\cos u = x$, $-\sin u du = dx$. Τοτε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x)} = \int \frac{-\sin u du}{\sin u\,(1+\cos u)} = -\int \frac{du}{1+\cos u} = -\int \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}} = -\frac{1}{2}\tan\frac{u}{2}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c.$$

6.2.18. Υπολογισε το $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$.
Λυση. Θετουμε $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. Τοτε

$$\int \sin^3 x\cos^2 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\sin x dx = -\int\left(1-u^2\right)u^2 du$$
$$= -\int\left(u^2-u^4\right)du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

6.2.19. Υπολογισε το $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int\left(\sin^2(2x)\right)dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)}{2}dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}\int \cos(4x)\,dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + c.$$

6.2.20. Υπολογισε το $\int \sin x \cos^3 x dx$.
Λυση. Θετω $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. Τοτε

$$\int \sin x \cos^3 x dx = -\int \cos^3 x d(\cos x) = -\int u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c.$$

6.2.21. Υπολογισε το $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4}(\sin 2x)^2 \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos(4x)}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2(2x)\, d(\sin(2x)) \\ &= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + c.\end{aligned}$$

6.2.22. Υπολογισε το $\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x} dx$.
Λυση. Θετουμε $u = x\sin x + \cos x$, $du = (\sin x + x\cos x - \sin x)\, dx$. Τοτε

$$\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x\sin x + \cos x) + c.$$

6.2.23. Υπολογισε το $\int \sin^7 x dx$.
Λυση Με $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x dx &= \int \sin^6 x \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^3 d(\cos x) = -\int \left(1-u^2\right)^3 du \\ &= -\int \left(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right) du = -u + u^3 - \frac{3}{5}u^5 + \frac{u^7}{7} \\ &= \cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^7 x + c.\end{aligned}$$

6.2.24. Υπολογισε το $\int \sin^4 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4}\right) dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin(4x) + c.\end{aligned}$$

6.2.25. Υπολογισε το $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}$.
Λυση. Θετοντας $u = (x+1)^{1/6}$ εχουμε $u^6 = x+1$, $6u^5 du = dx$. Τοτε

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} &= 6\int \frac{(u^6-1)\, u^5}{u^3 - u^2} du = 6\int \frac{(u^6-1)\, u^5}{u^2(u-1)} du \\ &= 6\int u^3\left(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1\right) du \\ &= 6\left(\frac{u^9}{9} + \frac{u^8}{8} + \frac{u^7}{7} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4}\right)\end{aligned}$$

$$= 6\left(\frac{(x+1)^{9/6}}{9} + \frac{(x+1)^{8/6}}{8} + \frac{(x+1)^{7/6}}{7} + \frac{(x+1)}{6} + \frac{(x+1)^{5/6}}{5} + \frac{(x+1)^{4/6}}{4}\right)$$

6.2.26. Υπολογισε το $\int \sqrt[3]{1-2x}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = 1 - 2x$, $du = -2dx$, εχουμε

$$\int \sqrt[3]{1-2x}dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/3}du = -\frac{3}{8}u^{4/3} = -\frac{3}{8}(1-2x)^{4/3} + c.$$

6.2.27. Υπολογισε το $\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$, εχουμε

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{1}u^{-1/2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

6.2.28. Υπολογισε το $\int e^{3x+2}dx$
Λυση. Θετοντας $u = 3x + 2$, $du = 3dx$, εχουμε

$$\int e^{3x+2}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u = \frac{1}{3}e^{3x+2} + c.$$

6.2.29. Υπολογισε το $\int \frac{x}{(2x+5)^2}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = 2x + 5$, $du = 2dx$, εχουμε

$$\int \frac{x}{(2x+5)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(u-5)/2}{u^2}du = \frac{1}{4}\int \frac{u-5}{u^2}du = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{5}{4}\int \frac{du}{u^2}$$
$$= \frac{1}{4}\ln|u| - \frac{5}{4}\cdot\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{1}{4}\ln|2x+5| + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2x+5} + c.$$

6.2.30. Υπολογισε το $\int x\sqrt{x-3}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = x - 3$, $du = dx$, εχουμε

$$\int x\sqrt{x-3}dx = \int (u+3)\,u^{1/2}du = \int \left(u^{3/2} + 3u^{1/2}\right)du$$
$$= \frac{2}{5}u^{5/2} + 3\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2} = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + c.$$

6.2.31. Υπολογισε το $\int \frac{\ln x}{x}dx$.
Λυση. Θετουμε $u = \ln x$, $du = dx/x$, οποτε

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int udu = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c.$$

6.2.32. Υπολογισε το $\int \frac{x+1/2}{x^2+x+3}dx$.
Λυση. Θετουμε $u = x^2 + x + 3$, οποτε $du = (2x+1)\,dx$. Ετσι

$$\int \frac{x+1/2}{x^2+x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+3\right| + c.$$

6.2.33. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x+3}}$.
Λυση. Θετουμε $u = \sqrt{2x+3}$, $udu = 2dx$. Τοτε

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x+3}} &= \frac{1}{2}\int \frac{udu}{\frac{u^2-3}{2}+u} = \int \frac{u}{u^2+2u-3}du \\ &= \int \left(\frac{1}{2(u-1)} + \frac{3}{2(u+3)}\right) du = \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{3}{2}\ln|u+3| \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2x+3}-1\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{2x+3}+3\right) + c.\end{aligned}$$

6.2.34. Υπολογισε το $\int x^3 e^x dx$.
Λυση. Θετοντας $f = x^3$, $g = e^x$, εχουμε

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - \int e^x dx^2\right) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 3\int 2xe^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(xe^x - \int e^x dx\right) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c.\end{aligned}$$

6.2.35. Υπολογισε το $\int x\ln(1+x^2)$.
Λυση. Θετοντας $f = x^2/2$, $g = \ln(1+x^2)$, εχουμε

$$\begin{aligned}\int x\ln\left(1+x^2\right)dx &= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{x^2/2}{1+x^2}d\left(x^2\right) \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c.\end{aligned}$$

6.2.36. Υπολογισε το $\int \sin^2 xdx$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^2 xdx &= -\int \sin(x)d(\cos(x)) \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x)d(\sin(x)) = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))dx = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx.\end{aligned}$$

Δηλαδη

$$\int \sin^2(x) = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx \Rightarrow 2\int \sin^2(x) = -\sin(x)\cos(x) + x \Rightarrow$$
$$\int \sin^2(x) = \frac{-\sin(x)\cos(x)+x}{2}.$$

6.2.37. Υπολογισε το $\int x\arctan xdx$.

Λυση. Θετοντας $f = \frac{x^2}{2}$, $g = \arctan x$, εχουμε

$$\begin{aligned}\int x\arctan x dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} d\left(\arctan x\right) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c.\end{aligned}$$

6.2.38. Υπολογισε το $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$.
Λυση. Θα υπολογισουμε ταυτοχρονως τα $J_1 = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx$ και $J_2 = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx$.

$$\begin{aligned}J_1 &= \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{2}e^{ax}\sin(bx)\,x - \frac{1}{a}\int e^{ax}\left(\sin(bx)\right)'dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}J_2. \\ J_2 &= \int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}e^{ax}\cos(bx)\,x + \frac{1}{a}\int e^{ax}\left(\cos(bx)\right)'dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}J_1.\end{aligned}$$

Δηλ. εχουμε

$$J_1 + \frac{b}{a}J_2 = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx), \qquad -\frac{b}{a}J_1 + J_2 = \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx).$$

Λυνοντας το συστημα ως προς J_1, J_2 παιρνουμε

$$J_1 = -\frac{be^{ax}\cos bx - ae^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}, \qquad J_2 = \frac{ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}$$

6.2.39. Υπολογισε το $\int (\ln x)^2\,dx$.
Λυση. Θετοντας $f = x$, $g = (\ln x)^2$, εχουμε

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\,dx &= x\cdot(\ln x)^2 - \int xd\left((\ln x)^2\right) = x\cdot(\ln x)^2 - \int 2x\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x\cdot(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x\cdot(\ln x)^2 - 2\cdot\left(x\cdot\ln x - \int xd\left(\ln x\right)\right) \\ &= x\cdot(\ln x)^2 - 2\cdot\left(x\cdot\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\right) = x\cdot(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x + c.\end{aligned}$$

6.2.40. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.
Λυση. Εχουμε, με συμπληρωση τετραγωνου, οτι

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2\cdot 2\cdot x + 2^2 + 1 = (x+2)^2 + 1.$$

Οποτε

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{d\left(x+2\right)}{(x+2)^2+1} = \arctan\left(x+2\right) + c.$$

6.2.41. Υπολογισε το $\int \frac{x^2-10x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$.
Λυση. Θετουμε

$$\begin{aligned}\frac{x^2-10x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \\ &= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2c)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.\end{aligned}$$

Αρα

$$\begin{aligned}A+B+C &= 1 \\ 5A+4B+3C &= 10 \\ 6A+3B+2C &= 13\end{aligned}$$

Η λυση ειναι $A=2$, $B=3$, $C=-4$ και ετσι

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-10x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx &= \int \frac{2dx}{x-1}+\int \frac{3dx}{x-2}-\int \frac{4dx}{x-3} \\ &= 2\ln|x-1|+3\ln|x-2|-4\ln|x-3|+c.\end{aligned}$$

6.2.42. Υπολογισε το $\int \frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x}dx$.
Λυση. Εχουμε $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ και $x^3+x^2-6x=x(x+3)(x-2)$. Οποτε

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x}dx = \int \frac{x+1}{x(x+3)}dx.$$

Ωχουμε επισης

$$\frac{x+1}{x(x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}$$

οποτε $A+B=1$, $3A=1$ και $A=1/3, B=2/3$ και

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}+\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{3}\ln|x|+\frac{2}{3}\ln|x+3|+c.$$

6.2.43. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{x^4-x^3+x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$x^4-x^3+x^2 = x^2\cdot\left(x^2-x+1\right)$$

και ο ορος x^2-x+1 δεν εχει πραγματικες ριζες. Οποτε θετουμε

$$\frac{1}{x^4-x^3+x^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1} = \frac{(A+C)x^3+(-A+B+D)x^2+(A-B)x+B}{x^2(x^2-x+1)}.$$

Οποτε εχουμε

$$\begin{aligned}A+C &= 0 \\ -A+B+D &= 0 \\ A-B &= 0 \\ B &= 1\end{aligned}$$

που εχει λυση $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 0$. Ετσι

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^3 + x^2} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{xdx}{x^2 - x + 1}$$
$$= \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - x + 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \sqrt{3}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) + c.$$

6.2.44. Υπολογισε το $\int \frac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)^2(x-3)}dx$.

Λυση. Αφου $(x+1)^2(x-3) = x^3 - x^2 - 5x - 3$, ο βαθμος του αριθμητη ειναι υψηλοτερος αυτου του παρονομαστη, αρα πρεπει να εκτελεσουμε πολυωνυμικη διαιρεση. Εχουμε

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & -3x^2 & +0x & +10 & x^3 - x^2 - 5x - 3 \\ \cline{6-6}
x^4 & -x^3 & -5x^2 & -3x & & x - 2 \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +2x^2 & +3x & +10 & \\
 & -2x^3 & +2x^2 & +10x & +6 & \\ \cline{2-5}
 & & & -7x & +4 &
\end{array}$$

που δινει πηλικο $x - 2$ και υπολοιπο $-7x + 4$, δηλ.

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 10}{(x+1)^2(x-3)}dx = \int \left(x - 2 + \frac{-7x+4}{(x+1)^2(x-3)}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \int \frac{7x-4}{(x+1)^2(x-3)}dx.$$

Για το τελευταιο ολοκληρωμα εχουμε

$$\frac{7x-4}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-3)}$$
$$= \frac{(A+C)x^2 + (-2A+B+2C)x + (-3A-3B+C)}{(x-3)(x+1)^2}$$

οποτε

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -2A + B + 2C &= 7 \\ -3A - 3B + C &= -4 \end{aligned}$$

με λυση $A = -\frac{17}{16}$, $B = \frac{11}{4}$, $C = \frac{17}{16}$ και ετσι

$$\int \frac{7x-4}{(x+1)^2(x-3)}dx = \int \left(\frac{-17/16}{x+1} + \frac{11/4}{(x+1)^2} + \frac{17/16}{x-3}\right)dx$$
$$= -\frac{11}{4(x+1)} - \frac{17}{16}\ln(x+1) + \frac{17}{16}\ln(x-3).$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ισουται με

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{11}{4(x+1)} + \frac{17}{16}\ln(x+1) - \frac{17}{16}\ln(x-3).$$

6.2.45. Υπολογισε το $\int \frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}dx$.

Λυση. Εδω απαιτειται η χρηση πολυωνυμικης διαιρεσης του $2x^3-5x^2-12x+5$ με το $2x+3$. Εχουμε

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & -12x & +5 & 2x+3 \\ \cline{5-5}
2x^3 & +3x^2 & & & x^2-4x \\ \cline{1-4}
 & -8x^2 & -12x & +5 & \\
 & -8x^2 & -12x & & \\ \cline{2-4}
 & & & +5 &
\end{array}
$$

που δινει πηλικο x^2-4x και υπολοιπο 5, δηλ.

$$\frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3} = x^2-4x+\frac{5}{2x+3}.$$

Οποτε εχουμε

$$\int \frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}dx = \int \left(x^2-4x+\frac{5}{2x+3}\right)dx = \frac{x^3}{3}-2x^2+\frac{5}{2}\ln|2x+3|+c.$$

6.2.46. Αποδειξε τις εξης ιδιοτητες..

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{6.23}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{6.24}$$

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx \tag{6.25}$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \tag{6.26}$$

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx \tag{6.27}$$

Λυση. Για την (6.23):

$$\int_a^a f(x)dx = F(a)-F(a) = 0.$$

Για την (6.24):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

Για την (6.25):

$$\int_a^b cf(x)dx = cF(b)-cF(a) = c(F(b)-F(a)) = c\int_a^b f(x)dx.$$

Για την (6.26):

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx &= F(b)\pm G(b)-(F(a)\pm G(a))\\ &= (F(b)-F(a))\pm(G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

Για την (6.27):

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx.$$

6.2.47. Αποδειξε οτι

$$(\forall x \in [a,b] : 0 \leq f(x)) \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)dx$$

Λυση. Θεωρείστε την συναρτηση $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$. Έχουμε (α) $F'(x) = f(x) \geq 0$ και (β) $F(a) = 0$. Άρα η $F(x)$ είναι αύξουσα, οπότε $x \geq a \Rightarrow F(x) \geq F(a) = 0$. Αν θέσουμε $x = b$, έχουμε $F(b) = \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6.2.48. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_1^2 xdx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

6.2.49. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x}dx = \int_0^\pi |\cos x|\,dx$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos xdx = 2 \cdot [\sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} = 2.$$

6.2.50. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^7 \sqrt{49 - x^2}dx$.
Λυση. Θετουμε $x = 7\sin u$, $dx = 7\cos udu$, οποτε

$$\int_0^7 \sqrt{49 - x^2}dx = 7\int_0^7 \sqrt{49 - 49\sin^2 u}\cos udu$$
$$= 49\int_{u=0}^{u=\pi/2} \cos udu = 49 \cdot \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_{u=0}^{u=\pi/2} = \frac{49}{4}\pi.$$

6.2.51. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^2 |1-x|\,dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x=1}^{x=2} = 1.$$

6.2.52. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_{-3}^{-1} \left|4 - x^2\right| dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_{-3}^{-1} \left|4 - x^2\right| dx = \int_{-3}^{-2} \left(x^2 - 4\right) dx + \int_{-2}^{-1} \left(4 - x^2\right) dx = 4.$$

6.2.53. Υπολογισε το $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}[\arctan x]_0^M$$
$$= \lim_{M\to\infty}\arctan M - \arctan 0 = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

6.2.54. Υπολογισε το $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \int_{x=0}^{x=\infty}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int_{u=0}^{u=\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{2\pi}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to\infty}\int_{u=0}^{u=M}e^{-u}du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to\infty}\left[-e^{-u}\right]_{u=0}^{u=M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to\infty}\left[1-e^{-M}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

6.2.55. Υπολογισε το $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.
Λυση. Θετοντας $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$, εχουμε

$$\int_{x=1}^{x=\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int_{u=1}^{u=0}\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}}\cdot\frac{du}{u^2}$$
$$= \int_{u=0}^{u=1}\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \left[\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|\right]_{u=0}^{u=1} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

6.2.56. Υπολογισε το $\int_0^2 \frac{2dx}{x^2-1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^2 \frac{2dx}{x^2-1} = \int_0^2\frac{dx}{x-1} - \int_0^2\frac{dx}{x+1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x-1} + \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{x-1} - \int_0^2\frac{dx}{x+1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\ln|x-1|\right]_{x=0}^{x=1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\ln|x-1|\right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} - \ln 3$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\ln\varepsilon - \ln 1\right] + \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\ln 1 - \ln\varepsilon\right] - \ln 3$$
$$= \infty - 0 + 0 - \infty - \ln 3$$

το οποιο ειναι απροσδιοριστο. Αρα το ολοκληρωμα $\int_0^2 \frac{2dx}{x^2-1}$ δεν ειναι ορισμενο.

6.2.57. Υπολογισε το $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to0^+}[-x]_{x=-1}^{x=-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to0^+}[-x]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}[\varepsilon-1] + \lim_{\varepsilon\to0^+}[-1+\varepsilon] = \infty + \infty = \infty.$$

6.3 Αλυτα Προβληματα

6.3.1. Αποδειξε οτι:

1. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$
2. $\int 1 dx = x + c.$
3. $\int \sqrt{x} dx = \frac{3}{2}x^{3/2} + c.$
4. $\int \sin dx = \cos x + c.$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c.$

6.3.2. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int x^3 dx$. *Απ.* $\frac{1}{4}x^4 + c.$
2. $\int (2x+4) dx$. *Απ.* $x^2 + 4x$, με $u = 2x + 4$, $du = 2dx$).
3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+5}} dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sqrt{(x^4+5)}$, με $u = x^4$ $du = 4x^3 dx$).
4. $\int \frac{x^2+2}{(x^3+6x+1)} dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\ln(x^3 + 6x + 1)$, με $u = x^3 + 6x + 1$, $du = (3x^2 + 6)dx$).
5. $\int \frac{dx}{4x-1}$. *Απ.* $\frac{1}{4}\ln(4x - 1)$, με $u = 4x - 1$, $du = 4dx$.
6. $\int (e^x + 2)^2 e^x dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}(e^x + 2)^3$, με $u = e^x$, $du = e^x dx$.
7. $\int \frac{\sin(2x)+\cos(2x)}{\cos(2x)} dx$. *Απ.* $\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx + \int \frac{\cos(2x)}{\cos(2x)} dx = -\frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + x.$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$. *Απ.* $\arcsin \frac{1}{3}x$, με $u = \frac{x}{3}$, $du = \frac{1}{3}dx$.
9. $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{3}x$, με $u = \frac{2}{3}x$, $du = \frac{2}{3}dx$.
10. $\int \frac{1}{4x^2+25} dx$. *Απ.* $\frac{1}{10}\arctan \frac{2}{5}x$, με $u = \frac{2}{5}x$, $du = \frac{2}{5}dx$.
11. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$. *Απ.* $-e^{\frac{1}{x}}$, με $u = \frac{1}{x}$.
12. Υπολογισε το $\int \frac{1}{e^{2x}+1} dx$. *Απ.* $-\frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) + \frac{1}{2}\ln(e^{2x})$, με $u = e^{2x} + 1, du = 2e^x dx$.

6.3.3. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int e^{2x}\cos(e^{2x}) dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sin(e^{2x})$, με $u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx$.
2. $\int \frac{1}{\sqrt{4-(x+2)^2}} dx$. *Απ.* $\arcsin\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$, με $u = \frac{1}{2}x, du = \frac{1}{2}dx$.
3. $\int \frac{1}{\sqrt{-4x-x^2}} dx$. *Απ.* $\arcsin\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$, δες το παραπανω.

4. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}}$. *Απ.* $\frac{1}{2}\arctan(e^{2x})$, με $u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx$.

5. $\int \frac{1}{9x^2-4}dx$. *Απ.* $\frac{1}{12}\ln(3x-2) - \frac{1}{12}\ln(3x+2)$.

6. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$. *Απ.* $\sqrt{x^2+4} + 3\,\text{arcsinh}\,\frac{1}{2}x$, με $u = x^2+4$, και σπανοντας το ολοκληρωμα σε δυο μερη.

7. $\int \frac{1}{\sqrt{10+4x-x^2}}dx$. *Απ.* $\arcsin \frac{1}{14}\sqrt{14}\,(x-2)$, με συμπληρωση του τετραγωνου.

8. $\int \frac{x+4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$. *Απ.* $-\sqrt{(5-4x-x^2)} + 2\arcsin\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$, με $u = x+3$, συμπληρωση του τετραγωνου και διασπαση του ολοκληρωματος σε δυο μερη.

6.3.4. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \cos^3 x dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x$, με $u = \sin x$.

2. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. *Απ.* $-\frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{8}\cos x \sin x + \frac{1}{8}x$, με $\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 2x$.

3. $\int \cos^2(x)\sin(x)dx$. *Απ.* $-\frac{1}{3}\cos^3 x$, με $u = \cos x, du = -\sin x dx$.

4. $\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx$. *Απ.* $\tan\frac{1}{2}x$, με αντικαταστaση $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.

5. $\int \sin 2x \cos 4x dx$. *Απ.* $-\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 2x$, με $\sin 2x \cos 4x = \frac{1}{2}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

6.3.5. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \sinh\frac{x}{2}dx$. *Απ.* $2\cosh\frac{1}{2}x$.

2. $\int e^x \sinh x dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\cosh x \sinh x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cosh^2 x$, με $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

3. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\ln\left(3x + \sqrt{(9x^2-4)}\right)$, με $u = \frac{3}{2}x$.

4. $\int \sqrt{4x^2+9}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}x\sqrt{(4x^2+9)} + \frac{9}{4}\,\text{arcsinh}\,\frac{2}{3}x$, με $u = \text{arcsinh}\,\frac{2}{3}x$.

5. $\int \frac{1}{9x^2-4}dx$. *Απ.* $\frac{1}{12}\ln(3x-2) - \frac{1}{12}\ln(3x+2)$, με $u = \frac{3}{2}x$.

6. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9+x^2}}dx$.
Απ. $-\frac{1}{9x}\sqrt{(9+x^2)}$, με $x = 3\tan u, dx = (1+\frac{x^2}{9})du$. $\left[\frac{d(\frac{a}{b}\tan(u))}{du} = \frac{a}{b}(1+\tan^2 u)\right]$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-9)} + \frac{9}{2}\ln\left(x + \sqrt{(x^2-9)}\right)$, με $x = \frac{2}{\cos(z)}, dx = \frac{1}{3}\frac{\tan(z)}{\cos(z)}dz$.

8. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x}dx$.
Απ. $\sqrt{(4-9x^2)} - 2\,\text{arctanh}\,\frac{1}{2}\sqrt{(4-9x^2)}$, με $x = \frac{2}{3}\sin(z), dx = \frac{2}{3}\cos z dz$.

9. $\int \frac{1}{x\sqrt{9+4x^2}}dx$. *Απ.* $-\frac{1}{3}\,\text{arctanh}\,\frac{1}{3}\sqrt{(9+4x^2)}$, με $x = \frac{3}{2}\tan(u), dx = \frac{3}{2\cos^2(z)}dz$).

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.
 Απ. $-\frac{1}{2}x\sqrt{(2x-x^2)}-\frac{3}{2}\sqrt{(2x-x^2)}+\frac{3}{2}\arcsin(x-1)$, με $x-1=\sin(z), dx=\cos(z)dz$.

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{4-2x}}dx$. *Απ.* $-\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}\sqrt{(4-2x)}$, με $4-2x=z^2, dx=-\frac{1}{2}zdz$.

12. $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+3}}dx$. *Απ.* $-\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}\sqrt{(x+3)}$, με $x+3=u^2, dx=2udu$.

13. $\int \frac{1}{(9+x^2)^{3/2}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{(9+x^2)}}$.

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$. *Απ.* $\frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+2\sqrt{x+1}$.

6.3.6. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \frac{1}{x^{1/3}-x^{2/3}}dx$.
 Απ. $-3\sqrt[3]{x}-2\ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right)+\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)-\ln(x-1)$, με $x=u^3, dx=3u^2du$.

2. $\int \frac{1}{1+\sin(x)-\cos(x)}dx$. *Απ.* $\ln\left(\tan\frac{1}{2}x\right)-\ln\left(\tan\frac{1}{2}x+1\right)$, με $\sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}, dx=\frac{2}{1+u^2}dz$.

3. $\int \frac{1}{3+\sin(x)}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\frac{1}{8}\left(6\tan\frac{1}{2}x+2\right)\sqrt{2}$.

4. $\int x\sin xdx$. *Απ.* $\sin x-x\cos x$.

5. $\int x^3\ln xdx$.
 Απ. $\int\ln(x)d(\frac{1}{4}x^4)=\frac{1}{4}x^4\ln(x)-\frac{1}{4}\int x^4d(\ln(x))=\frac{1}{4}x^4\ln(x)-\frac{1}{4}\int x^4\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4$.

6. $\int\arcsin xdx$. *Απ.* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

7. $\int x^2\sin xdx$. *Απ.* $-x^2\cos x+2\cos x+2x\sin x$.

8. $\int\tan^{-1}xdx$. *Απ.* $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

9. $\int x^2e^{-2x}dx$. *Απ.* $-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}$.

10. $\int\cos(\ln(x))dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))$.

6.3.7. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int\frac{1}{x^2-9}dx$. *Απ.* $\left(\frac{1}{6}\ln(x-3)-\frac{1}{6}\ln(x+3)\right)$.

2. $\int\frac{x+1}{x^2+5x+6}dx$. *Απ.* $\int\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\ln(x+3)-\ln(x+2)$.

3. $\int\frac{x+2}{x^3-x^2-x+1}dx$.
 Απ. $\int\left(\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}\right)dx=\frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\ln(x-1)$.

4. $\int\frac{x+1}{(x+2)^3}dx$. *Απ.* $\int\left(-\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx=\frac{1}{2(x+2)^2}-\frac{1}{x+2}$.

5. $\int \frac{x^2+x+3}{x-2+x^3-2x^2} dx$.
   Απ. $\int \left(\frac{9}{5(x-2)} - \frac{1}{5} \frac{3+4x}{1+x^2} \right) dx = \frac{9}{5} \ln(x-2) - \frac{2}{5} \ln(1+x^2) - \frac{3}{5} \arctan x$.

6. $\int \frac{1}{x^2+7x+6} dx$. *Απ.* $-\frac{1}{5} \ln(x+6) + \frac{1}{5} \ln(x+1)$.

7. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$. *Απ.* $x + \ln(x+2) + 4\ln(x-4)$.

8. $\int \frac{1}{x^3+x} dx$. *Απ.* $\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

9. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} dx$. *Απ.* $-\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$.

10. $\int \frac{1}{e^{2x}-4e^x} dx$. *Απ.* $\frac{1}{4e^x} - \frac{1}{16} \ln(e^x) + \frac{1}{16} \ln(e^x - 4)$.

6.3.8. Αποδειξε οτι.

$$(\forall x \in [a,b] : g(x) \leq f(x)) \Rightarrow \int_a^b g(x) d \leq \int_a^b f(x) dx \tag{6.28}$$

$$(\forall x \in [a,b] : A \leq f(x) \leq B) \Rightarrow A \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq B \cdot (b-a) \tag{6.29}$$

6.3.9. Υπολογισε το γενιμευμενο ολοκληρωμα αν αυτο υπαρχει.

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$. *Απ.* 1.

2. $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$. *Απ.* ∞.

3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^n} dx$. *Απ.* $\frac{1}{n-1}$ οταν $n > 1$, ∞ οταν $n \leq 1$.

4. $\int_0^\infty e^{-x} dx$. *Απ.* 1.

5. $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$. *Απ.* $1/2$.

6. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$. *Απ.* $\pi/4$.

7. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx$. *Απ.* $\ln 2)$.

8. $\int_0^\infty x^2 e^{-x/2} dx$. *Απ.* 16.

6.3.10. Υπολογισε το γενιμευμενο ολοκληρωμα αν αυτο υπαρχει.

1. $\int_2^6 \left[\frac{1}{(4-x)^2} \right]^{1/3} dx$. *Απ.* $6 \cdot 2^{1/3}$.

2. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$. *Απ.* ∞.

3. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^3} dx$. *Απ.* Δεν υπαρχει.

4. $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$. *Απ.* $3/8$.

6.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

6.4.1. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int (1+2x^2)\, e^{x^2} dx$. *Απ.* xe^{x^2}.
2. $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx$. *Απ.* $\arctan x^3 - \frac{1}{2}\pi + \arctan x$.
3. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\arctan x^3 - \frac{1}{2}\pi + \arctan x$.
4. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx$.
5. $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x} dx$.
6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.
7. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.
8. $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.

6.4.2. $\lim_{p\to\infty} \int_a^b f\left(\frac{x}{p}\right) dx = \int_a^b \lim_{p\to\infty} f\left(\frac{x}{p}\right) dx$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

6.4.3. Αν η $f(x)$ ειναι (α) θετικη για καθε x και (β) μη φραγμενη, τοτε $\int_1^\infty f(x)\, dx = \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

6.4.4. Αν η $f(x)$ ειναι φραγμενη και $\int_1^\infty g(x)\, dx < \infty$, τοτε $\int_1^\infty f(x)\, g(x)\, dx < \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

6.4.5 (Cauchy-Schwarz). Έστω συνεχείς συναρτήσεις $f(x), g(x)$. Να δειχτεί ότι

$$\left|\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\right| = \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\, dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2\, dx}.$$

6.4.6 (Holder). Έστω συνεχείς συναρτήσεις $f(x), g(x)$ και αριθμοί $p, q \in [1, \infty)$ τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Να αποδειχτεί ότι

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q}.$$

6.4.7 (Minkowski). Έστω συνεχείς συναρτήσεις $f(x), g(x)$ και αριθμός $p \in [1, \infty)$. Να δειχτεί ότι

$$\left(\int_0^1 |f(x) + g(x)|^p\right)^{1/p} dx = \left(\int_0^1 [f(x)]^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 [g(x)]^p\, dx\right)^{1/p}.$$

6.4.8 (Gromwell). Έστω παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x), g(x)$ οι οποίες ικανοποιούν

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{df}{dx} \leq f(x)\, g(x).$$

Αποδειξε οτι

$$\forall a, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(a)\, e^{\int_a^x g(u)du}.$$

6.4.9. Εστω $f(x)$ συνεχης στο $[0,1]$. Αποδειξε οτι

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx.$$

6.4.10. Βρες ολες τις $f(x)$ συνεχεις στο $[0,1]$ οι οποιες ικανοποιουν

$$\int_0^{\pi} f(x)(x - f(x))\, dx = \frac{1}{12}.$$

6.4.11. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το

$$\int_a^b \left([f(x)]^2 - 2x f(x) \right) dx$$

όταν η $f(x)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση.

6.4.12. Έστω $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδειξε οτι

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

6.4.13. Εστω $f(x)$ μη αυξουσα στο $[0,1]$. Αποδειξε οτι, για καθε $a \in (0,1)$, ισχυει

$$a \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^a f(x)\, dx.$$

6.4.14. Εστω $f(x)$ συνεχης στο $[0,1]$. Αποδειξε οτι

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 \leq \pi \int_0^1 (f(x))^2\, dx.$$

6.4.15. Έστω συνεχής συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε ισχύει

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall x, y \in \mathbb{R} : f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Αποδειξε οτι

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : f\left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

6.4.16 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω συνεχής συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq \left| \int_0^x f(u)\, du \right|.$$

Αποδειξε οτι $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$.

6.4.17 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\forall x \leq y : \int_x^y f(u)\, du = \frac{1}{2}\left(yf(y) - xf(x)\right).$$

6.4.18 (Μαθ. Διαγωνισμός Putnam). Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και

$$\forall x \in [0, 1] : 0 < \frac{df}{dx} \leq 1.$$

Αποδειξε οτι

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3\, dx.$$

Κεφάλαιο 7

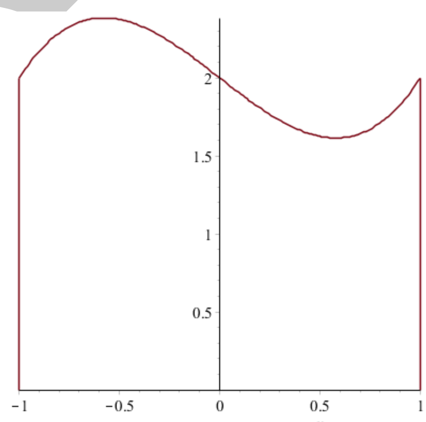
Εμβαδον, Μηκος και Ογκος

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b F(x)\,dx$ μπορεί να ερμηνευθεί γεωμετρικά ως το *εμβαδόν* ενός σχήματος που ορίζει η $F(x)$ και τα a, b. Ομοίως, το *μήκος* της καμπύλης που ορίζει η $F(x)$ μπορεί να υπολογιστεί με την χρήση ενός ορισμένου ολοκληρώματος.

7.1 Θεωρια και Παραδειγματα

7.1.1. Θεωρημα: Εστω μια *συνεχης* συναρτηση $f(x) \geq 0$. Επιλεγω σταθερους αριθμους a, b (με $a \leq b$) και θεωρω το *χωριο* που οριζεται απο την $f(x)$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = a$, $x = b$ (δες το Σχημα 7.1). Το χωριο αυτο εχει εμβαδον

$$E = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.1}$$



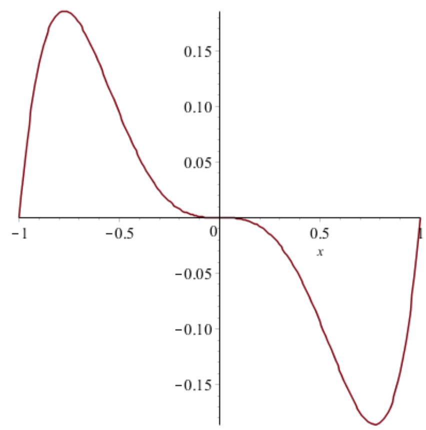
Σχ.7.1: Το ορισμενο ολοκληρωμα ως εμβαδον..

7.1.2. Παρατηρηση: Εστω μια *τυχούσα* συναρτηση $f(x)$. Μπορούμε να *ορίσουμε* το εμβαδόν E (το οποίο περικλείεται από την $f(x)$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = a$, $x = b$) να ειναι ισο με

$$E = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.2}$$

Το ολοκλήρωμα της (7.2) υπάρχει πάντα, όμως η ερμηνεία του ως εμβαδού απαιτεί ορισμένες διευκρινίσεις.

7.1.3. Παρατηρηση: Το $\int_a^b f(x)\,dx$ μπορεί να παίρνει αρνητικές τιμές. Χρησιμοποιούμε την συμβαση οτι το τμημα του σχηματος που βρισκεται κατω απο τον αξονα των x εχει *αρνητικο* εμβαδο (δηλαδη το εμβαδον ενος χωριου ειναι *προσημασμενη*, αρνητικη η θετικη ποσοτητα). Επίσης, κατά τον υπολογισμό του εμβαδού με ολοκλήρωση, τα θετικά και αρνητικά εμβαδά αθροίζονται αλγεβρικά. Έτσι είναι δυνατόν μία συνάρτηση $f(x)$ να περικλείει μηδενικό εμβαδόν (δε το Σχήμα 7.2)



Σχ.7.2: Καμπυλη που περικλειει μηδενικο εμβαδον.

7.1.4. Παρατηρηση: Περαιτέρω, η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να είναι τέτοια ώστε να μην δημιουργεί ένα γεωμετρικά αναγνωρίσιμο σχήμα με καλά ορισμένο εμβαδόν. Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι σαφές ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ αντιστοιχεί σε γεωμετρικό εμβαδόν. Θα εξετάσουμε παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων στο Εδάφιο 7.2.

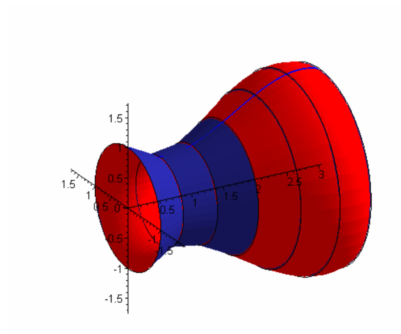
7.1.5. Θεωρημα: Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και C η καμπύλη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ η οποία περικλείεται από τις ευθείες $x=a$ και $x=b$. Τοτε το *μηκος τοξου* (δηλ. το μηκος της καμπυλης C) ειναι

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx. \tag{7.3}$$

7.1.6. Παρατηρηση: Είναι φυσικό μετά το μήκος και το εμβαδόν, να ασχοληθούμε και με τον υπολογισμό του όγκου. Αυτός ο υπολογισμός γενικά απαιτεί την χρήση *διπλών* ή *τριπλών ολοκληρωμάτων*. Όμως υπάρχουν κάποιες κατηγορίες στερελων των οποίων ο όγκος μπορεί να υπολογιστεί με χρήση «απλού» ολοκληρώματος.

7.1.7. Ορισμος: Θεωρησε μια καμπυλη η οποια περιγραφεται απο τη συναρτηση $f(x)$, $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$. Φαντασου οτι η καμπυλη περιστρεφεται γυρω απο τον αξονα των x (δες το Σχημα

7.3). Τοτε σχηματιζεται ενα στερεο σωμα, το οποιο λεγεται *στερεο εκ περιστροφης*.



Σχ.7.3: Στερεο εκ περιστροφης μιας καμπυλης γυρω απο τον αξονα των x.

7.1.8. Θεωρημα: Ο ογκος του παραπάνω στερεου ειναι

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \tag{7.4}$$

7.1.9. Θεωρημα: Το εμβαδον της επιφανειας του παραπάνω στερεου ειναι

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx. \tag{7.5}$$

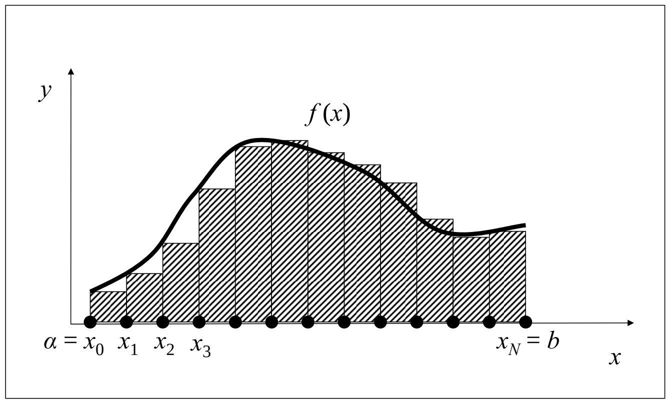
7.1.10. Θεωρημα: Αντιστοιχα, αν μια καμπυλη η οποια περιγραφεται απο τη συναρτηση $f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, περιστραφει γυρω απο τον αξονα των y, το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζει η καμπυλη ειναι

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx \tag{7.6}$$

7.2 Λυμενα Προβληματα

7.2.1. Αποδειξε την 7.1.
Λυση Δες το σχημα **;;**. Τα σημεια $x_0, x_1, ..., x_N$ ικανοποιουν $a = x_0 < x_1 < .... < x_N = b$ και

$x_n - x_{n-1} = \Delta x$ (για $n = 1, 2, ..., N$).



Σχ.7.4: Προσεγγιση του εμβαδου με αθροισμα εμβαδων ορθογωνιων παραλληλογραμμων.

Μπορουμε να προσεγγισουμε το ζητουμενο εμβαδον E ως το αθροισμα των N ορθογωνιων παραλληλογραμων που εμφανιζονται στο σχημα· το n-στο παραλληλογραμμο εχει βαση μηκους $x_n - x_{n-1} = \Delta x$ και υψος $f(x_n)$, οποτε το εμβαδον του ειναι $f(x_n)\,\Delta x$. Το συνολικο εμβαδον ειναι

$$E_N = \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\Delta x.$$

Η προσεγγιση ειναι τοσο καλυτερη οσο μεγαλυτερο ειναι το N (ο αριθμος των παραλληλογραμμων). Παιρνοντας το οριο $N \to \infty$ εχουμε

$$E = \lim_{N\to\infty} E_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.7}$$

Το αθροισμα μετατραπηκε στο συμβολο $\int_a^b$, οπου εχουμε τα σημεια $x_0 = a$, $x_N = b$· το Δx μετατραπηκε στο dx (λαβετε υποψη οτι καθως το $N \to \infty$, το $\Delta x \to 0$). Ομως το $\int_a^b f(x)\,dx$ ειναι απλα ενας Συμβολισμος· πρεπει τωρα να *δειξουμε* οτι $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, $F(x) = \int f(x)\,dx$, δηλ. να δειξουμε οτι υπαρχει σχεση μεταξυ του ορισμενου και αοριστου ολοκληρωματος.

Για να επιτυχουμε αυτο, με δεδομενο a, οριζουμε την *συναρτηση εμβαδου*

$$E(z) = \int_a^z f(x)\,dx.$$

Αυτη η συναρτηση πρεπει να δινει το εμβαδον του σχηματος που οριζεται απο την $f(x)$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = a$, $x = z$ *για καθε* z. Ιδιαιτερα, πρεπει να εχουμε $E(b) = E$ (το αρχικα ζητουμενο εμβαδον) και $E(a) = 0$ (γιατι;). Ας υπολογισουμε την παραγωγο $E'(z)$:

$$E'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{E(z+\Delta z) - E(z)}{\Delta z}$$
$$= \frac{1}{\Delta z}\left(\int_a^{z+\Delta z} f(x)\,dx - \int_a^z f(x)\,dx\right) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(x)\,dx.$$

Το $\int_z^{z+\Delta z} f(x)\,dx$ ειναι το εμβαδον του σχηματος που οριζεται απο την $f(x)$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = z$, $x = z + \Delta z$. Οταν το Δz ειναι αρκετα μικρο, το εμβαδον αυτο μπορει να προσεγγιστει απο το παραλληλογραμμο με βαση Δz και υψος $f(z)$. Δηλ.

$$E'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} f(z)\,\Delta z = f(z).$$

Αυτο πρεπει να ισχυει για *καθε* υποψηφια συναρτηση εμβαδου, και μπορει να επιτευχθει παιρνοντας *οποιοδηποτε* αοριστο ολοκληρωμα της $f(z)$· με αλλα λογια, αρκει να εχουμε

$$F(z) = \int f(z)\,dz, \qquad E(z) = F(z) + c.$$

Για να ισχυει επιπλεον το $F(a) = 0$, πρεπει να επιλεξουμε καταλληλα την σταθερα ολοκληρωσης c. Θα εχουμε

$$0 = E(a) = F(a) + c \Rightarrow c = -F(a) \Rightarrow E(z) = F(z) - F(a).$$

Συμφωνα δε με τον ορισμο της $E(z)$, το αρχικα ζητουμενο εμβαδον (απο το a ως το b) θα ειναι

$$E = E(b) = F(b) - F(a)$$

και αυτο θα ισχυει για *καθε* $F(z) = \int f(z)\,dz$, δηλ. δειξαμε το ζητουμενο.

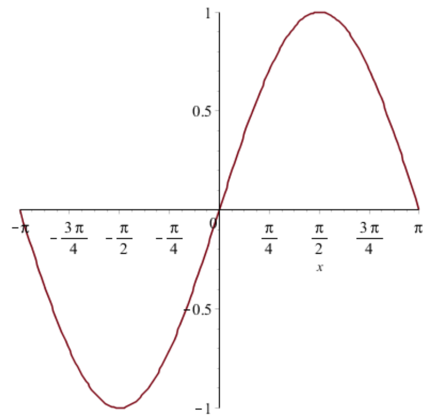
7.2.2. Ισχύει ότι $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία αυτού.
Λυση. Έχουμε $\int \sin x dx = -\cos x$. Στο διάστημα $(0, \pi)$ ισχύει $\sin(x) > 0$ και επίσης έχουμε

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Με άλλα λόγια, το εμβαδόν που περικλείεται από την $\sin x$ και τον άξονα των x (και τα όρια $x = 0, x = \pi$) ισούται με δύο μονάδες επιφάνειας και είναι θετικό. Επίσης στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$ ισχύει $\sin(x) < 0$ και επίσης έχουμε

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{x=\pi}^{x=2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -2.$$

Με άλλα λόγια, το εμβαδόν που περικλείεται από την $\sin x$ και τον άξονα των x (και τα όρια $x = \pi, x = 2\pi$) ισούται με δύο μονάδες επιφάνειας και είναι *αρνητικό*. Οπότε το συνολικό εμβαδόν, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7.5το συνολικό «αλγεβρικό» εμβαδόν είναι 0.

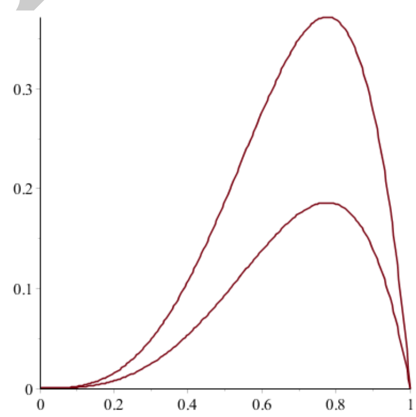


Σχ.7.5: Το εμβαδον που αντιστοιχει στο $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

7.2.3. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Υπάρχει γεωμετρική ερμηνεία του $\int_0^1 f(x)\,dx$;
Λυση. Δεν υπάρχει προφανής γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος, διότι δεν είναι σαφές αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζει ένα επίπεδο σχήμα. Η $f(x)$ είναι *ασυνεχής* σε κάθε ρητό αριθμό (γιατί;) και κατά συνέπεια δεν μπορεί να σχεδιαστεί (το Σχήμα 7.6 *δεν* είναι ακριβές). Αφού δεν υπάρχει ορισμένο γεωμετρικό σχήμα, δεν έχει νόημα να μιλάμε και για το εμβαδόν του.



Σχ.7.6: Η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$.

Παραμένει αρκετά ενδιαφέροντα ερώτηματα. Π.χ.: (α) αγνοώντας την γεωμετρική σκοπιά, είναι το $\int_0^1 f(x)\,dx$ καλώς ορισμένο; (β) αν το $\int_0^1 f(x)\,dx$ καλώς ορισμένο, ποια είναι η αριθμητική τιμή του;

7.2.4. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία των παρακάτω γνωστών ιδιοτήτων.

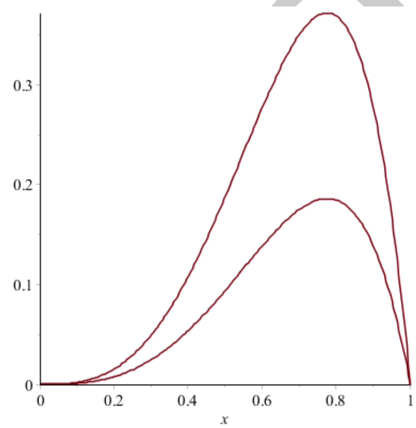
$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$(\forall x \in [a,b] : 0 \leq f(x)) \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)dx$$

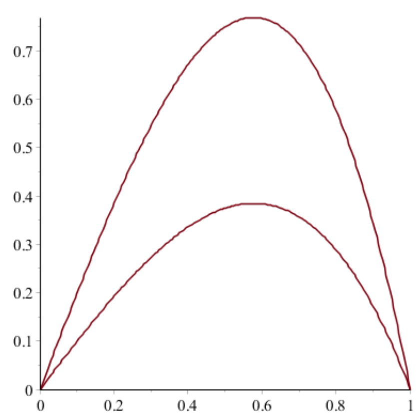
$$\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Λυση. Η ιδιότητα $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$ σημαίνει: αν πολλαπλασιάσουμε την $f(x)$ με τον αριθμό c, το εμβαδόν του αντίστοιχου σχήματος επίσης πολλαπλασιάσουμε την $f(x)$ με τον αριθμό c,. Δείτε και το Σχήμα 7.7.



Σχ.7.7: Η ιδιότητα $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$.

Η ιδιότητα $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ ερμηνεύεται ως εξής: το εμβαδόν E_1 το οποίο περιέχεται μεταξύ των καμπυλών $f(x)$ και $g(x)$ ισούται με την διαφορά $E_1 - E_2$, όπου E_1 είναι το εμβαδόν που περιέχεται μεταξύ της $f(x)$ και του άξονα των x, και E_2 είναι το εμβαδόν που περιέχεται μεταξύ της $g(x)$ και του άξονα των x,. Δείτε και το Σχήμα 7.8.

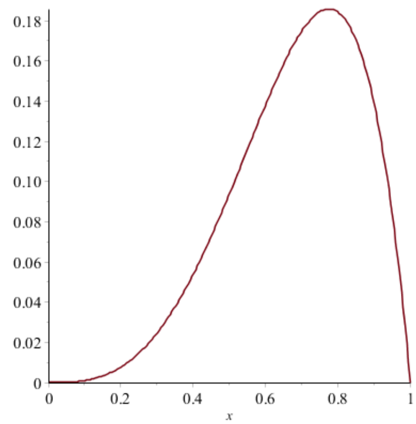


Σχ.7.8: $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$

Η ιδιότητα

$$(\forall x \in [a, b] : 0 \leq f(x)) \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)dx$$

ερμηνεύεται ως εξής: αν η καμπύλη της $f(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x τότε το αντίστοιχο εμβαδόν είναι θετικό. Δείτε το σχήμα 7.9.

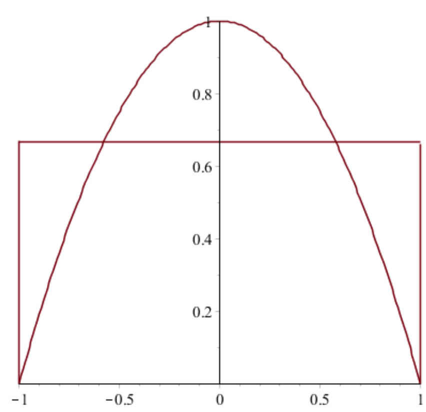


Σχ.7.9.

Η ιδιότητα

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

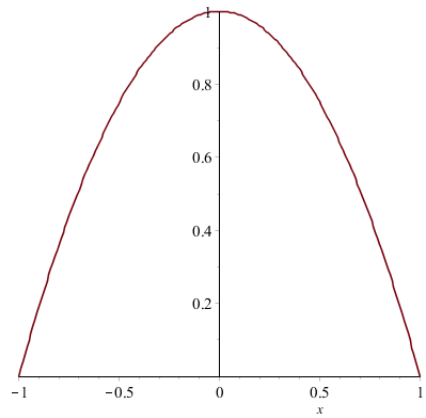
ερμηνεύεται ως εξής: το εμβαδον του σχηματος που οριζει η $f(x)$ θα ειναι ισο με το εμβαδον ενος παραλληλογραμου με βαση μηκους $b - a$ και υψος M, όπου το M ειναι η τιμη της $f(x)$ σε ενα σημειο $x_0 \in [a, b]$. Δείτε και το Σχήμα 7.10.



Σχ.7.10: $f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$

7.2.5. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο την καμπυλη $y = 1 - x^2$ και τον αξονα των x.

Λυση. Δες το σχημα 7.11. Η $y = 1 - x^2$ τεμνει το ανξονα των x στα σημεια οπου $0 = 1 - x^2$, δηλ. $x = \pm 1$.



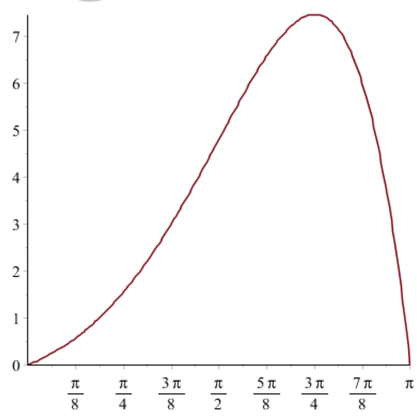
Σχ.7.11.

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{3}.$$

7.2.6. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο την καμπυλη $y = e^x \sin x$, την ευθεια $x = 0$ και τον αξονα των x.

Λυση. Δες το σχημα 7.12. Θα υπολογισουμε το εμβαδον για $x \in [0, \pi]$ (υπαρχουν και αλλα σημεια στα οποια η $y(x)$ τεμνει τον αξονα των x αλλα δεν θα τα μελετησουμε).



Σχ.7.12.

Ειναι γνωστο (δες Κεφαλαιο 5) οτι

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x).$$

Οποτε

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \left[\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

7.2.7. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y = e^{x/2}$, $y = \frac{1}{x^2}$ και τις ευθειες $x = 2$, $x = 3$.
Λυση.

$$E = \int_2^3 \left(e^{x/2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[2e^{x/2} + \frac{1}{x}\right]_{x=2}^{x=3} = 2e^{3/2} + \frac{1}{3} - 2e - \frac{1}{2} = 2e \cdot \left(e^{1/2} - 1\right) - \frac{1}{6}.$$

7.2.8. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y = x^2 - 4$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.
Λυση. Οι δυο καμπυλες τεμνονται στα σημεια οπου

$$x^2 - 4 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \left(x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -2\right)$$

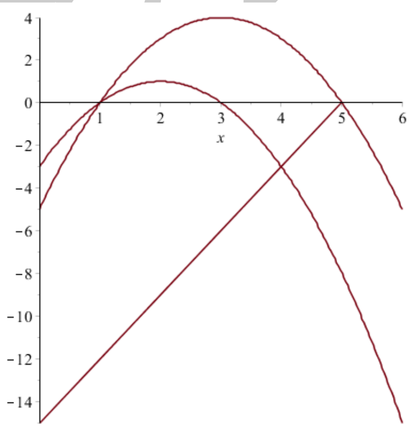
Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$E = \int_{-2}^{5/2} \left(\frac{1}{2}x + 1 - \left(x^2 - 4\right)\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5x\right]_{x=-2}^{x=5/2} = \frac{729}{48}.$$

7.2.9. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y_1(x) = -x^2 + 6x - 5$, $y_2(x) = -x^2 + 4x - 3$ και $y_3(x) = 3x - 15$.
Λυση. Δες το σχημα 7.13. Η $y_1(x)$ και η $y_2(x)$ τεμνονται στα x που ικανοποιουν

$$-x^2 + 6x - 5 = -x^2 + 4x - 3$$

δηλ. στο $x_1 = 1$.



Σχ.7.13

Η $y_1(x)$ και η $y_3(x)$ τεμνονται στα x που ικανοποιουν

$$-x^2 + 6x - 5 = 3x - 15$$

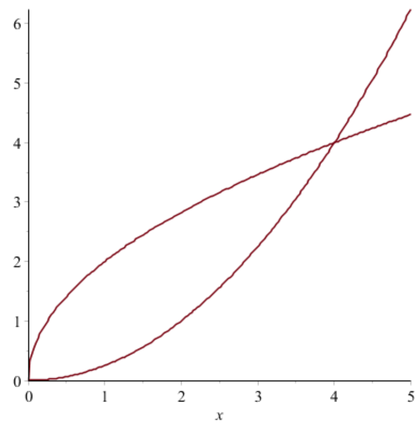
δηλ. στο $x_2 = 5$ και στο -3 που απορριπτεται (γιατι;). Τελος, η $y_2(x)$ και η $y_3(x)$ τεμνονται στα x που ικανοποιουν

$$3x - 15 = -x^2 + 4x - 3$$

δηλ. στο $x_3 = 4$ και στο -3 που απορριπτεται (γιατι;). Οποτε το ζητουμενο εμβαδον δινεται απο

$$E_1 = \int_1^4 (y_1(x) - y_2(x))\, dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 6x - 5 - \left(-x^2 + 4x - 3\right)\right) dx = 9,$$
$$E_2 = \int_4^5 (y_1(x) - y_3(x))\, dx = \int_4^5 \left(-x^2 + 6x - 5 - (3x - 15)\right) dx = \frac{19}{6},$$
$$E = E_1 + E_2 = 9 + \frac{19}{6} = \frac{73}{6}.$$

7.2.10. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
Λυση. Δες το σχημα 7.14.



Σχ.7.14: Το εμβαδον που περικλειουν οι $y^2 = 4x, x^2 = 4y$..

Τα σημεια τομης δινονται απο

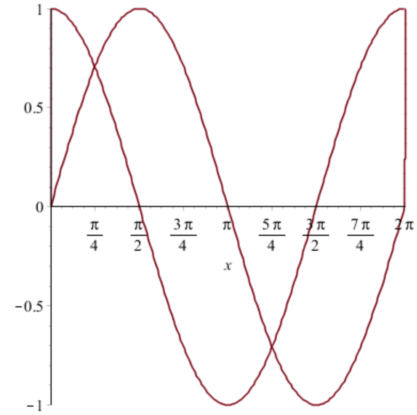
$$x^2 = 4y \Rightarrow x^4 = 16y^2 = 64x \Rightarrow (x = 0, x = 4).$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{16}{3}.$$

7.2.11. Υπολογισε το εμβαδον που οριζεται απο τις καμπυλες $y = \cos x$, $y = \sin x$ και τις ευθειες $x = 0$, $x = 2\pi$.

Λυση. Δες το σχημα 7.15.



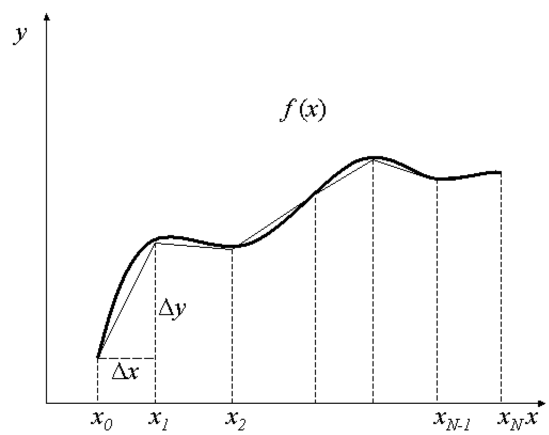
Σχ.7.15: Το εμβαδον μεταξυ των $y = \cos x, y = \sin x,\ x = 0,\ x = 2\pi$.

Το ζητουμενο εμβαδο ειναι

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\, dx \\
&= [\sin x + \cos x]_{x=0}^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{x=\pi/4}^{5\pi/4} + [\sin x + \cos x]_{x=5\pi/4}^{2\pi} \\
&= \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

7.2.12. Αποδειξε την 7.3.

Λυση. Δες το σχημα 7.16.



Σχ.7.16: Προσεγγιση του μηκους τοξου.

Εστω οτι το διαστημα $[a, b]$ χωριζεται σε μικροτερα διαστηματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{N-1}, x_N]$, οπου $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ και

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_N - x_{N-1} = \Delta x = \frac{b-a}{N}.$$

Τοτε το μηκος της καμπυλης μπορει να προσεγγιστει απο το μηκος της τεθλασμενης γραμμης $A_0A_1...A_N$ και η προσεγιση θα ειναι τοσο καλυτερη οσο μικροτερο το Δx, δηλ. καθως $N \to \infty$. Θεωρησε το n-στο ευθυγραμμο τμημα της $A_0A_1...A_N$, δηλ. το $A_{n-1}A_n$. Αυτο εχει μηκος

$$\Delta s_n = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f_n^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_n}{\Delta x}\right)^2}.$$

Το συνολικο μηκος της τεθλασμενης γραμμης με N ευθυγραμμα τμηματα ειναι

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \Delta s_n = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_n}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

το δε πραγματικο μηκος της καμπυλης ειναι

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_n}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx$$

οπου εχουμε χρησιμοποιησει την κλασσικη προσεγγιση του λογισμου, αντικαθιστωντας το αθροισμα με ολοκληρωμα και τον λογο των διαφορων $\frac{\Delta f_n}{\Delta x}$ με την παραγωγο $\frac{df}{dx}$. Ο παραπανω συλλογισμος ειναι διαισθητικος, αλλα μπορει να γινει αυστηρα σωστος χρησιμοποιωντας καταλληλα επιχειρηματα (που εκφευγουν απο τους στοχους του παροντος τευχους).

7.2.13. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$, $a = 0$, $b = 1$.
Λυση. Συμφωνα με τον τυπο (**;;**), το ζητουμενο μηκος ειναι

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

7.2.14. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.
Λυση. Εδω εχουμε

$$\frac{df}{dx} = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}$$

οποτε

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{x^6}{4} + \frac{1}{4x^6} - \frac{1}{2}} dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3}\right)^2} dx$$
$$= \int_1^4 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3}\right) dx = \frac{2055}{64}.$$

7.2.15. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $f(y) = \frac{y^4}{2} + \frac{1}{16y^2}$, $a = 1$, $b = 2$.
Λυση. Εδω η καμπυλη δινεται με ανεξαρτητη μεταβλητη την y. Οποτε εχουμε

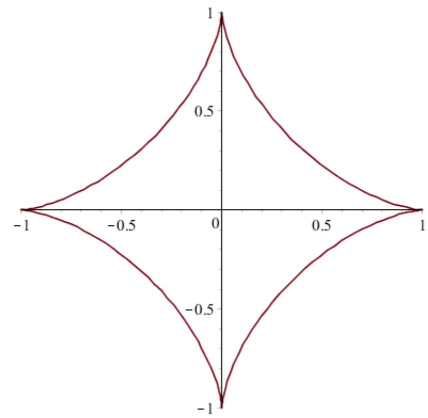
$$\frac{df}{dy} = 2y^3 - \frac{1}{8y^3}$$

και

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2} = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(2y^3 - \frac{1}{8y^3}\right)^2} dy = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(2y^3 + \frac{1}{8y^3}\right)^2} dy = \frac{483}{64}$$

7.2.16. Υπολογισε το μηκος της κλειστης καμπυλης που δινεται σε πεπλεγμενη μορφη: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Λυση. Δες το σχημα 7.17.



Σχ.7.17: Η καμπυλη $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Θεωρωντας την x ως ανεξαρτητη μεταβλητη εχουμε

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{1/3}}{y^{1/3}}.$$

Παρατηρειστε επισης στο σχημα οτι το x μεταβαλλεται απο το $-a$ ως το a. Οποτε

$$\begin{aligned} s &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{x^{1/3}}{y^{1/3}}\right)^2} dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dy = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} dy \\ &= a^{1/3} \int_{-a}^{a} x^{-1/3} dy = \frac{3}{2} a^{1/3} \left[x^{2/3}\right]_{x=-a}^{x=a} = 3a. \end{aligned}$$

Αυτο ομως ειναι το μηκος του ανω μισου της καμπυλης. Το ζητουμενο μηκος ειναι διπλασιο, δηλ. $6a$.

7.2.17. Δικαιολογειστε την (7.4).
Λυση. Δες το σχημα **;;**. Ο ζητουμενος ογκος V του στερεου εκ περιστροφης μπορει να προσεγγιστει απο το αθροισμα των ογκων των *στοιχειωδων κυλινδρων* οι οποιοι αντιστοιχουν στην διαμεριση του διαστηματος $[a, b]$ σε υποδιαστηματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{N-1}, x_N]$, με $a = x_0 < x_1 < ... < x_N$ και $x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b-a}{N}$. Καθε ενας απο αυτους τους κυλινδρους εχει ογκο $\Delta V_n = \pi \cdot [f(x_n)]^2 \cdot \Delta x$ και ο συνολικος ογκος ειναι

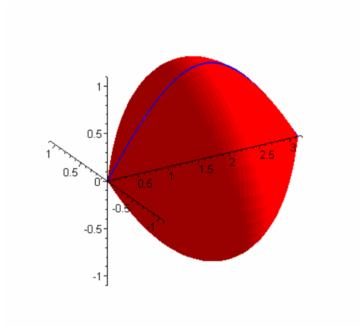
$$V_N = \sum_{n=1}^{N} \pi \cdot [f(x_n)]^2 \cdot \Delta x. \tag{7.8}$$

Η προσεγγιση γινεται ακριβεστερη καθως το N τεινει στο απειρο. Εχουμε $V_N \underset{N\to\infty}{\to} V$ οπου, αντικαθιστωντας στην (7.8) το αθροισμα με ολοκληρωμα, παιρνουμε

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Ο παραπανω συλλογισμος ειναι διαισθητικος, αλλα μπορει να γινει αυστηρα σωστος χρησιμοποιωντας καταλληλα επιχειρηματα (που εκφευγουν απο τους στοχους του παροντος τευχους).

7.2.18. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \pi]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Δες το σχημα 7.18.



Σχ.7.18.

Συμφωνα με την (7.4)

$$V = \pi \int_0^\pi \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx = \int_0^\pi \sin x dx = -\pi \left[\cos x\right]_{x=0}^{x=\pi} = 2\pi.$$

7.2.19. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της ελλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, γυρω απο τον αξονα των x.

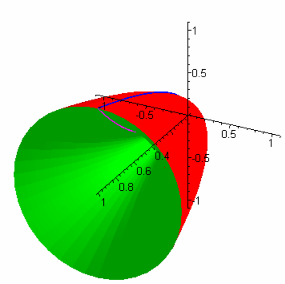
Λυση. Αρκει να υπολογισουμε τον ογκο που προκυπτει απο την περιστροφη της $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $x \in [-a, a]$, γυρω απο τον αξονα των x. Ετσι εχουμε

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

7.2.20. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Απο τον (7.5) εχουμε

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{28\pi}{15}.$$

7.2.21. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη γυρω απο τον αξονα των x των καμπυλων $y = x^2$ και $x = y^2$.
Λυση. Δες το σχημα 7.19.



Σχ.7.19.

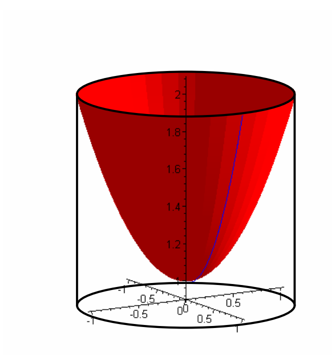
Ο ζητουμενος ογκος ειναι $V = V_2 - V_1$, οπου V_1 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $x = y^2$ και V_2 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $y = x^2$. Τα ορια ολοκληρωσης ειναι τα σημεια τομης των δυο καμπυλων, στα $x = 0$ και $x = 1$. Εχουμε

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{5}$$
$$V_2 = \pi \int_0^1 \left(x^{1/2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$
$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi}{10}.$$

7.2.22. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη γυρω απο τον αξονα των x των καμπυλων $y = x^2\sqrt{2}/a$ και $x^2 + y^2 = a^2$.
Λυση. Παρομοια με την προηγουμενη Ασκηση, ο ζητουμενος ογκος ειναι $V = V_2 - V_1$, οπου V_1 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $y = x^2\sqrt{2}/a$ και V_2 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $x^2 + y^2 = a^2$. Τα ορια ολοκληρωσης ειναι τα σημεια τομης των δυο καμπυλων, στα $x = -a/\sqrt{2}$ και $x = a/\sqrt{2}$. Εχουμε

$$V_1 = 2\pi \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} \left(x^2 \frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2 dx = \frac{1}{5}\sqrt{2}\pi a^3,$$
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ επειδη το σχηματιζομενο στερεο ειναι σφαιρα,}$$
$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{\sqrt{2}}{5}a^3.$$

7.2.23. Βρες τον ογκο του στερεου που οριζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$ (γυρω απο τον αξονα των y) και απο τον κυλινδρο που φαινεται στο σχημα **;;**.
Λυση. Στο Εδαφιο **;;** δεν εχουμε δωσει τυπο καταλληλο για αυτη την περιπτωση. Δες το Σχημα 7.20.



Σχ.7.20.

Φαινεται οτι ο ζητουμενος ογκος $V = V_1 - V_2$, οπου

$$V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$$

ειναι ο ογκος του εξωτερικου κυλινδρου και V_2 ειναι ο ογκος του εσωτερικου στερεου (αυτο ειναι ενα *παραβολοειδες*). Ο V_2 υπολογιζεται με ενα τυπο αναλογο του (7.4), για συναρτηση $x = g(y)$, δηλ.

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$$

οποτε

$$V_2 = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - 2y\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{\pi}{2}.$$

Τελικα ο ζητουμενος ογκος ειναι $V = V_1 - V_2 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = 3\pi/2$.

7.2.24. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Συμφωνα με την (7.5) εχουμε

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{36} \int_0^1 \left(1 + 9x^4\right)^{1/2} d\left(x^4\right)$$
$$= \frac{\pi}{18} \left[\frac{\left(1 + 9x^4\right)^{3/2}}{3/2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2} - 1\right).$$

7.2.25. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $f(x) = x^2$, $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$, γυρω απο τον αξονα των y.
Λυση. Εδω η περιστροφη γινεται γυρω απο τον αξονα των y οποτε ο τυπος (7.5) δεν εφαρμοζεται. Μπορει ομως να αποδειχθει ευκολα (Κανε το!) οτι το ζητουμενο εμβαδο δινεται απο την

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{\pi}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 + 4x^2\right)^{1/2} d\left(4x^2\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\left(1 + 4x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.$$

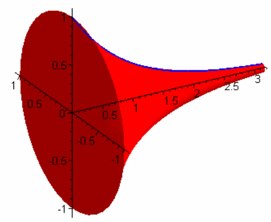
7.2.26. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $9y^2 = x \cdot (3 - x)^2$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Η καμπυλη τεμνει τον αξονα των x στα σημεια $a = 0$ και $b = 3$. Επισης εχουμε

$$y = \frac{\sqrt{x}(3 - x)}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{2\sqrt{x}}.$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{\sqrt{x}(3 - x)}{3} \sqrt{1 + \left(\frac{1 - x}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^3 -\frac{1}{6}(x + 1)(x - 3)\, dx$$
$$= \frac{\pi}{3} \int_0^3 \left(2x + 3 - x^2\right) dx = \frac{\pi}{3} \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3} = 3\pi.$$

7.2.27. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Δες το Σχημα 7.21. Η $f(x)$ δεν τεμνει τον αξονα των x, ετσι θα χρειαστει να υπολογισουμε ενα γενικευμενο ολοκληρωμα.



Σχ.7.21.

Εχουμε $\frac{df}{dx} = -e^{-x}$ και

$$V_M = 2\pi \int_0^M e^{-x} \sqrt{1 + (-e^{-x})^2} dx = -2\pi \int_{x=0}^{x=M} \left(1 + e^{-2x}\right)^{1/2} d\left(e^{-x}\right)$$
$$= -2\pi \int_{u=1}^{u=e^{-M}} \left(1 + u^2\right)^{1/2} du = 2\pi \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_{u=e^{-M}}^{u=1}.$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι $V = \lim_{M\to\infty} V_M$, οποτε

$$V = 2\pi \lim_{M\to\infty} \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_{u=e^{-M}}^{u=1}$$
$$= 2\pi \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_{u=0}^{u=1} = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

7.2.28. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \cosh x$, $x \in [-1, 1]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση.

$$E = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx.$$

Αλλα $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$ οποτε

$$E = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 x dx = \cosh 1 \sinh 1 + 1.$$

7.3 Αλυτα Προβληματα

Σε καθε μια απο τις παρακατω περιπτωσεις σχεδιασε το σχημα το οποιο σχηματιζουν οι καμπυλες και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

7.3.1. $y_1(x) = x^2 + x$, $x = 1$, $x = 3$.

Απ. $\int_1^3 (x^2+x)dx = \frac{38}{3}$, $\int_1^3 \left|x^2+x\right| dx = \frac{38}{3}$.

7.3.2. $y_1(x) = x^2 + x$, $x = -2$, $x = 0$.

Απ. $\int_{-2}^0 (x^2+x)dx = \frac{2}{3}$, $\int_{-2}^0 \left|x^2+x\right| dx = \int_{-2}^{-1}(x^2+x)dx - \int_{-1}^0 (x^2+x)dx = 1$.

7.3.3. $y_1(x) = x^3$, $x = 0$, $x = 5$.

Απ. $\int_0^5 x^3 dx = \frac{625}{4}$, $\int_0^5 \left|x^3\right| dx = \frac{625}{4}$.

7.3.4. $y_1(x) = x^3$, $x = -1$, $x = 1$.

Απ. $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$, $\int_{-1}^1 \left|x^3\right| dx = 2\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{2}$.

7.3.5. $y_1(x) = e^x$, $x = 0$, $x = 2$.

Απ. $\int_0^2 e^x dx = \int_0^2 |e^x|\, dx = e^2 - 1$.

7.3.6. $y_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $x = 0$.

Απ. Ριζες: $x = 1, -2, -1$. $\int_{-2}^0 (x^3+2x^2-x-2)dx = -\frac{2}{3}$. $\int_{-2}^0 \left|x^3+2x^2-x-2\right| dx = \int_{-2}^{-1}(x^3+2x^2-x-2)dx - \int_{-1}^0 (x^3+2x^2-x-2)dx = \frac{5}{12} + \frac{13}{12} = \frac{3}{2}$.

7.3.7. $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x$.

Απ. Ριζες: $x = 0, 1, -1$. $\int_{-1}^1 (x^3 - x)\, dx = 0$. $\int_{-1}^1 \left|x^3 - x\right| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx + \int_0^1 (x - x^3)dx = \frac{1}{2}$.

7.3.8. $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x^2$.

Απ. Ριζες: $x = 0, 1$. $\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \int_0^1 \left|x^2 - x^3\right| dx = \frac{1}{12}$.

7.3.9. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = 6x - 2$.

Απ. Ριζες: $x = 3 \pm \sqrt{7}$, $\int_{3-\sqrt{7}}^{3+\sqrt{7}} (x^2 - 6x + 2)dx = -\frac{28}{3}\sqrt{7}$, $\int_{3-\sqrt{7}}^{3+\sqrt{7}} \left|x^2 - 6x + 2\right| dx = \frac{28}{3}\sqrt{7}$.

7.3.10. $y_1(x) = \sqrt{x^3}$, $y_2(x) = x^2$.

Απ. Ριζες: $x = 0, 1$, $\int_0^1 (\sqrt{x}^3 - x^2)dx = \int_0^1 \left|\sqrt{x}^3 - x^2\right| dx = \frac{1}{15}$.

7.3.11. $y_1(x) = \sqrt{x}$, $y_2(x) = 1$, $x_3(y) = 4$.

Απ. Για $y_1(x) = y_2(x)$ παιρνουμε $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$. Οποτε $\int_0^4 \sqrt{x}dx - \int_0^1 \sqrt{x}dx - 1 \cdot 3 = \frac{5}{3}$.

7.3.12. $x_1(y) = y^2 + 2$, $y_2(x) = x - 8$.

Απ. Η $y^2 + 2 = y + 8$ εχει ριζες $y = 3, -2$. Οποτε $\int_{-2}^3 \left|y^2 + 2 - (y+8)\right| dy = \frac{125}{6}$.

7.3.13. Υπολογισε το εμβαδον του σχηματος που βρισκεται μεταξυ της ελλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ και της υπερβολης $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

Απ. $\sqrt{2}\ln 3 + 4\arcsin\sqrt{2/3}$.

Σε καθε μια απο τις παρακατω περιπτωσεις υπολογιστε το μηκος του αντιστοιχου τοξου.

7.3.14. $y^2 = x^3$ μεταξυ των σημειων που τεμνονται απο την ευθεια $x = 4/3$.

Απ. 112/27.

7.3.15. $y = \frac{x^2}{2} - 1$, μεταξυ των σημειων που τεμνονται απο την ευθεια $x = 0$.

Απ. $\sqrt{6} + \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

7.3.16. $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ μεταξυ των ευθειων $x = a$, $x = -a$.

Απ. $2a\sinh(1)$.

7.3.17. $9y^2 = x(x-3)^2$ μεταξυ των σημειων τομης με τον αξονα των x.

Απ. $4\sqrt{3}$.

7.3.18. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, μεταξυ των σημειων τομης απο την ευθεια $x = -1$.

Απ. 28/3.

7.3.19. $y = \ln(1-x^2)$, μεταξυ των ευθειων $x = 1/2$, $x = -1/2$.

Απ. $2\cdot\ln(3) - 1$.

7.3.20. $y^3 = 8x^2$, μεταξυ των ευθειων $x = 1$, $x = 8$.

Απ. $\frac{1}{27}\left(104\sqrt{13} - 125\right)$.

7.3.21. $y = \frac{x^4+3}{6x}$, μεταξυ των ευθειων $x = 1$, $x = 2$.

Απ. 17/12.

7.3.22. $y = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$, μεταξυ των ευθειων $x = 0$, $x = 3$.

Απ. 21.

7.3.23. $y = \frac{x^4+48}{24x}$, μεταξυ των ευθειων $x = 2$, $x = 4$.

Απ. 17/6.

Σε καθεμια απο τις παρακατω ασκησεις, καταρχην σχεδιαστε την καμπυλη.

7.3.24. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = 1/\sqrt{x+1}$, $x \in [0,3]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\pi\ln 4$.

7.3.25. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $3\pi/4$.

7.3.26. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{\pi}{2} \cdot (1 - e^{-2})$.

7.3.27. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \pi/2]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. π.

7.3.28. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = 8x$, $x \in [0, 2]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. 16π.

7.3.29. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\pi^2/2$.

7.3.30. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$, γυρω απο τον αξονα y.

Απ. 2π.

7.3.31. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^3$, $x \in [0, 2]$, γυρω απο τον αξονα y.

Απ. 19π.

7.3.32. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^3/3$, $x \in [0, 3]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{\pi}{9}\left(82^{3/2} - 1\right)$.

7.3.33. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [1, 2]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{47\pi}{16}$.

7.3.34. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^{1/3} + 2$, $x \in [1, 8]$, γυρω απο τον αξονα y.

Απ. $\frac{\pi}{27}\left(145^{3/2} - 10^{3/2}\right)$.

7.3.35. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $x \in [1, 4]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi} - 2)$.

7.3.36. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $x \in [1, e]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{\pi}{16}(e^4 - 9)$.

7.3.37. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $x^2 + (y-2)^2 = 1$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $8\pi^2$.

7.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

7.4.1. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία των παρακάτω γνωστών ιδιοτήτων.

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx$$

$$(\forall x \in [a,b] : g(x) \leq f(x)) \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$(\forall x \in [a,b] : A \leq f(x) \leq B) \Rightarrow A \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B \cdot (b-a)$$

7.4.2. Έστω συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$. Δείξτε ότι

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2} \leq \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx.$$

7.4.3. Έστω συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\, dx \leq \int_0^{2\pi} \left[\frac{df}{dx}\right]^2 dx.$$

7.4.4. Έστω τυχούσα κλειστή επίπεδη καμπύλη η οποία έχει μήκος S και περικλείει εμβαδόν A. Δείξτε ότι $4\pi A \leq S^2$. Υπάρχει καμπύλη για την οποία ισχύει η ισότητα;

7.4.5. Από όλες τις κλειστές επίπεδες καμπύλες δεδομένου μήκους S, ποιά είναι εκείνη η οποία περικλείει το μέγιστο εμβαδόν; Το ελάχιστο;

7.4.6. Δικαιολογειστε την (7.5).

Κεφάλαιο 8

Παραμετρικες Συναρτησεις

Σε αρκετα απο τα προηγουμενα κεφαλαια εχουμε θεωρησει την γραφικη παρασταση μιας συναρτησης $y = f(x)$ ως μια *καμπυλη*. Ομως υπαρχουν καμπυλες που δεν μπορουν να γραφτουν ευκολα ως συναρτησεις. Σε τετοιες περιπτωσεις μπορουμε να χρησιμοποιησουμε την παραμετρικη αναπαρασταση μιας καμπυλης: $(x(t), y(t))$ με την ανεξαρτητη μεταβλητη t να παιρνει τιμες σε ενα καταλληλο συνολο.

8.1 Θεωρια και Παραδειγματα

8.1.1. Παρατηρηση: Μπορουμε να παραστησουμε μια καμπυλη με δυο συναρτησεις $x(t), y(t)$, με την ανεξαρτητη μεταβλητη t να παιρνει τιμες σε ενα καταλληλο διαστημα $[t_1, t_2]$. Με αλλα λογια, η καμπυλη C ειναι το συνολο των σημειων

$$C : \{(x(t), y(t)) :, t \in [t_1, t_2]\}.$$

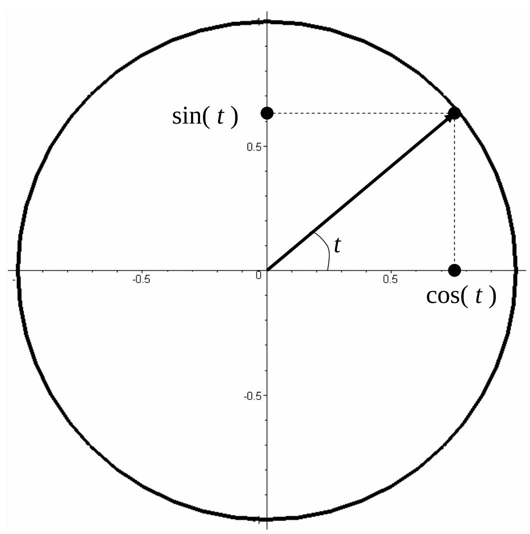
Αυτη η περιγραφη λεγεται *παραμετρικη παρασταση καμπυλης* και οι $x(t), y(t)$ λεγονται *παραμετρικες εξισωσεις της καμπυλης*. Η ιδια καμπυλη μπορει να εχει *περισσοτερες απο μια* παραμετρικες παραστασεις.

8.1.2. Παρατηρηση: Μπορουμε να ερμηνευσουμε την μεταβλητη t ως μια *χρονικη* μεταβλητη και να θεωρησουμε τα $x(t)$, $y(t)$ ως τις συντεταγμενες ενος σημειου το οποιο διατρεχει την καμπυλη. Δηλ. η καμπυλη ειναι η τροχια ενος υλικου σημειου το οποιο σε χρονο t βρισκεται στο σημειο $(x(t), y(t))$.

8.1.3. Ασκηση: Δωσε τρεις διαφορετικες παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$.
Λυση. Ζητούμε ένα τέτοιο ζεύγος συναρτήσεων $x(t)$, $y(t)$ οι οποίες ικανοποιούν $x^2 + y^2 = R^2$. Εύκολα φαίνεται ότι ένα τέτοιο ζεύγος συναρτήσεων είναι

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t.$$

Δες το σχημα 8.1.



Σχ.8.1: Παραμετρικες εξισωσεις του κυκλου: $(R\cos t, R\sin t)$.

Υπάρχουν και άλλα ζεύγη τα οποία παριστάνουν τον ίδιο κύκλο. Π.χ.

$$x(t) = R\cos 2t, \quad y(t) = R\sin 2t$$
$$x(t) = R\sin t, \quad y(t) = R\cos t$$

κ.τ.λ.

8.1.4. Παρατηρηση: Απο την παραμετρικη αναπαρασταση $(x(t), y(t))$ μπορουμε να υπολογισουμε τις παραγωγους $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ κ.τ.λ.

8.1.5. Ασκηση: Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$.
Λυση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{1 - \cos t} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}.$$

8.1.6. Ασκηση: Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$.
Λυση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\right)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(1 - \sin 2t)(\cos t - \sin t)}.$$

8.1.7. Θεωρημα: Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε παραμετρικη μορφη $(x(t), y(t))$ και οταν το t παιρνει τιμες απο t_1 ως t_2, η καμπυλη περικλειει ενα *χωριο*. Τοτε το εμβαδο του χωριου δινεται απο τους τυπους

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \frac{dy}{dt} dt.$$

Αποδειξη. Αυτο προκυπτει αμεσα με αλλαγη μεταβλητης ολοκληρωσης:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt.$$

8.1.8. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον του κυκλου $x^2 + y^2 = R^2$.
Λυση. Μια παραμετρικη εξισωση του κυκλου ειναι

$$x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, t \in [0, 2\pi].$$

Τοτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$E = \int_0^{2\pi} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} R \sin t \cdot (-R \sin t)\, dt = -R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$
$$= -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[-R^2 \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{2\pi} + \left[R^2 \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=0}^{2\pi} = -\pi R^2 + 0 = -\pi R^2.$$

Στην προκειμενη περιπτωση το εμβαδον προεκυψε σωστο κατ΄ απολυτη τιμη αλλα *αρνητικο*. Θυμησου οτι ο κυκλος $x^2 + y^2 = R^2$ μπορει να παραμετροπιηθει και με αλλους τροπους. Π.χ. η παραμετροποιηση

$$x(t) = R \sin t, y(t) = R \cos t, t \in [0, 2\pi]$$

δινει τον ιδιο κυκλο και υπολογιζοντας το εμβαδον παιρνουμε θετικο αριθμο:

$$E = \int_0^{2\pi} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} R \cos t \cdot (R \cos t)\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi R^2.$$

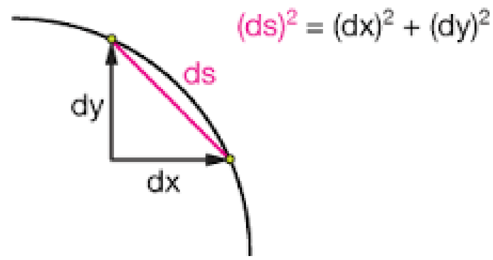
8.1.9. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον της ελλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Λυση. Μια παραμετροποιηση της ελλειψης ειναι $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Τοτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$E = \int_0^{2\pi} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} b \sin t \cdot (-a \sin t)\, dt = -ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$
$$= -ab \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[-ab \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{2\pi} + \left[ab \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=0}^{2\pi} = -\pi ab.$$

8.1.10. Θεωρημα: Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε παραμετρικη μορφη $(x(t), y(t))$ και το t παιρνει τιμες απο t_1 ως t_2. Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Αποδειξη. Ας συμβολισουμε με $s(t)$ το μηκος του τμηματος της καμπυλης το οποιο περιεχεται μεταξυ των τιμων $t_0 = 0$ και τυχοντος t. Ας υποθεσουμε οτι το t μεταβαλλεται και γινεται $t + \Delta t$. Ας *προσεγγισουμε* το προστιθεμενο μηκος με αυτο ενος ορθογωνιους τριγωνου με πλευρες dx, dy, ds. Δες το σχημα 8.2.



Σχ.8.2: Υπολογισμος μηκους τοξου .

Τοτε η μεταβολη του μηκους ειναι προσεγγιστικα

$$s(t+\Delta t) - s(t) \simeq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}
\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} &\simeq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Rightarrow \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Rightarrow \\
\frac{ds}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \Rightarrow \\
s(t) &= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + c \\
&= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + c.
\end{aligned}$$

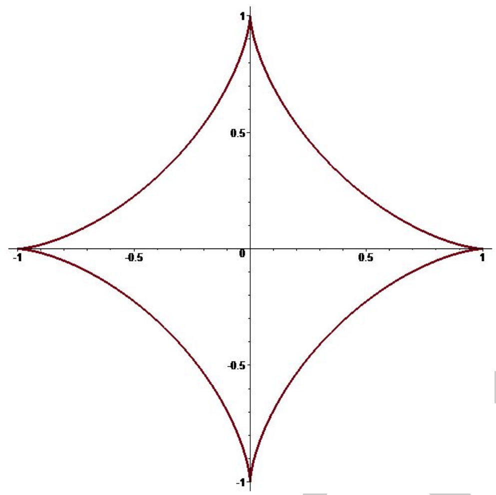
Επειδη $s(0) = 0$ (γιατι;) θα ειναι $c = 0$. Εστω s_1 το μηκος απο $t_0 = 0$ εως $t = t_1$και s_2 αυτο απο $s_0 = 0$ εως $t = t_2$. Θα εχουμε

$$s_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad s_2 = \int_0^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Οποτε το ζητουμενο μηκος ειναι

$$\begin{aligned}
s = s_2 - s_1 &= \int_0^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt - \int_0^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.
\end{aligned}$$

8.1.11. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$
Λυση. Αυτη ειναι μια κλειστη καμπυλη, οπως φαινεται στο Σχημα 8.3.

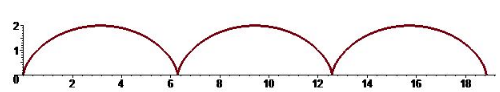


Σχ.8.3: Υπολογισμος μηκους της $x(t) = a\cos^3 t, y(t) = a\sin^3 t$.

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + \left(3a\sin^2 t \cos t\right)^2} dt$$
$$= 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} dt$$
$$= 3a \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\, dt = 12a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{2} dt = 6a.$$

8.1.12. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 6\pi]$
Λυση. Αυτη ειναι η κυκλοειδης καμπυλη, που απεικονιζεται στο Σχημα 8.4.



Σχ.8.4: Υπολογισμος μηκους της $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t)$.

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{a^2 \cdot (1-\cos t)^2 + a^2 \cdot \sin^2 t dt} \\
&= a \int_0^{6\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t dt} = a \int_0^{6\pi} \sqrt{2\,(1-\cos t)} dt \\
&= a \int_0^{6\pi} 2 \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 6a \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 24a.
\end{aligned}
$$

8.1.13. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = t$, $y(t) = t^{3/2}$, $t \in [0,4]$
Λυση. Εχουμε

$$
\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} t^{1/2}
$$

και

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} t^{1/2}\right)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} t} dt \\
&= \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}\right)^{1/2} dt = \frac{56}{27}.
\end{aligned}
$$

8.1.14. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = \frac{t^2}{2}$, $y(t) = \frac{(6t+9)^{3/2}}{9}$, $t \in [0,4]$
Λυση. Εχουμε

$$
\frac{dx}{dt} = t, \quad \frac{dy}{dt} = (6t+9)^{1/2}
$$

και

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^4 \sqrt{t^2 + \left((6t+9)^{1/2}\right)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{t^2 + 6t + 9} dt \\
&= \int_0^4 (t+3)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + 3t\right)_{t=0}^{t=4} = 20.
\end{aligned}
$$

8.1.15. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $t \in [0,4]$
Λυση. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^4 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt = \int_0^4 2t \sqrt{1 + \frac{3}{2} t^2} dt \\
&= \int_{t=0}^{t=4} \left(1 + \frac{3}{2} t^2\right)^{1/2} d\left(t^2\right) = \int_{u=0}^{u=16} \left(1 + \frac{3}{2} u\right)^{1/2} du = \frac{8}{27}\left(37^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

8.1.16. Παρατηρηση: Αλλοι υπολογισμοι οι οποιοι σε προηγουμενα κεφαλαια δοθηκαν σε σχεση με την αναπαρασταση $y = f(x)$ μπορουν να τροποποιηθουν χρησιμοποιωντας τις μετατροπες $dx = \frac{dx}{dt} dt$, $dy = \frac{dy}{dt} dt$. Δες τα Λυμενα Προβληματα.

8.2 Λυμενα Προβληματα

8.2.1. Δωσε τρεις διαφορετικες παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$.
Λυση. Ζητούμε ένα τέτοιο ζεύγος συναρτήσεων $x(t)$, $y(t)$ οι οποίες ικανοποιούν $x^2 + y^2 = R^2$. Εχουμε ηδη δει ότι ένα τέτοιο ζεύγος συναρτήσεων είναι

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t.$$

Αλλα ζεύγη τα οποία παριστάνουν τον ίδιο κύκλο ειναι

$$x(t) = R\sin 2t, \quad y(t) = R\cos 2t$$
$$x(t) = R\sin(t - \pi/3), \quad y(t) = R\cos(t - \pi/3)$$

κ.τ.λ.

8.2.2. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.
Λυση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)}{\sin t} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 t}}{\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

8.2.3. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν $x(t) = t^3 + t$, $y(t) = t^7 + t + 1$.
Λυση. Έχουμε

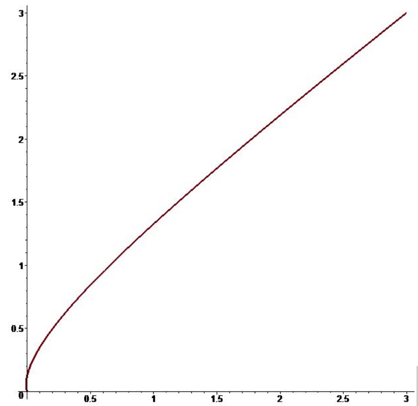
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{7t^6 + 1}{3t^2 + 1}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{42t^5(3t^2+1)-(7t^6+1)6t}{(3t^2+1)^2}}{3t^2 + 1} = \frac{6t(14t^6 + 7t^4 - 1)}{(3t^2 + 1)^3}.$$

8.2.4. Υπολογισε το εμβαδον της $x(t) = 6(t - \sin t)$, $y(t) = 6(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Λυση. Εχουμε $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(6(t - \sin t)) = 6(1 - \cos t)$ και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$A = \int_0^{2\pi} y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{2\pi} 6(1 - \cos t)6(1 - \cos t)\,dt = 36\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2\,dt$$
$$= 36\int_0^{2\pi}\left(1 + \cos^2 t - 2\cos t\right)dt = 36\left(\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t dt + \int_0^{2\pi}\cos 2t dt\right)$$
$$= 36\left(\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi}\frac{1 + \cos 2t}{2}dt + \int_0^{2\pi}\cos 2t dt\right) = 36\cdot 3\pi = 108\pi.$$

8.2.5. Υπολογισε το εμβαδον μεταξυ της $x(t) = 4t^3 - t^2$, $y(t) = t^4 + 2t^2$, $t \in [0, 1]$, του αξονα των x και της $y = 3$.

Λυση. Εχουμε $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^3 - t^2) = 12t^2 - 2t$. Η γραφικη παρασταση ειναι

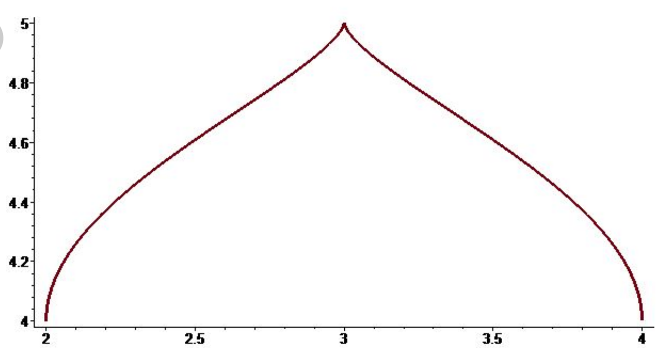


Σχ.8.5: $x(t) = 4t^3 - t^2, y(t) = t^4 + 2t^2, t \in [0, 1]$.

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^1 \left(t^4 + 2t^2\right)\left(12t^2 - 2t\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(12t^6 - 2t^5 + 24t^4 - 4t^3\right)dt \\
&= \left(\frac{12}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{24}{5}t^5 - t^4\right)_{t=0}^{1} = \frac{544}{105}.
\end{aligned}
$$

8.2.6. Υπολογισε το εμβαδον της $x(t) = 3 - \cos^3 t,\ y(t) = 4 + \sin t,\ t \in [0, \pi]$.
Λυση. Η γραφικη παρασταση ειναι



Σχ.8.6: $x(t) = 3 - \cos^3 t, y(t) = 4 + \sin t, t \in [0, \pi]$.

Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3 - \cos^3 t\right) = 3\cos^2 t \sin t.$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^\pi (4 + \sin t)\, 3\cos^2 t \sin t dt \\ &= \int_0^1 \left(12t^6 - 2t^5 + 24t^4 - 4t^3\right) dt = \frac{3\pi}{8} + 8. \end{aligned}$$

8.2.7. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = 1 + 2\cos t + \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t + \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\sin t - 2\sin 2t \\ \frac{dy}{dt} &= 2\cos t + 2\cos 2t \end{aligned}$$

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t - 2\sin 2t)^2 + (2\cos t + 2\cos 2t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\sin^2 2t + 8\sin t \sin 2t + 4\cos^2 t + 4\cos^2 2t + 8\cos t\cos 2t}dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos t}dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 \frac{t}{2}}dt = 4\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = 16 \end{aligned}$$

8.2.8. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = \ln(\sin t)$, $y(t) = t$, $t \in [\pi/4, \pi/2]$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \frac{dy}{dt} = 1.$$

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)}dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1}dt \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}\right)_{t=\pi/4}^{t=\pi/2} = -\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}\right) \end{aligned}$$

8.2.9. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\cos t + \sin t).$$

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{2 - 2\cos t \sin t + 2\cos t \sin t} dt = \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right) \end{aligned}$$

8.2.10. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $x(t) = 3t + 1$, $y(t) = 4 - t^2$, $t \in [0, 1]$
Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = -2t$$

και

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{9 + 4t^2} dt \\ &= \left[\frac{9}{4} \ln\left(2t + \sqrt{4t^2 + 9}\right) + \frac{1}{2} t \sqrt{4t^2 + 9}\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{9}{4} \ln \frac{\sqrt{13} + 2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

8.2.11. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = a \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a \cdot (1 - \cos t) \sqrt{a^2 \cdot (1 - \cos t)^2 + a^2 \cdot \sin^2 t} \\ &= 2\pi a^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi a^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= 4\pi a^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{64\pi a^2}{3}. \end{aligned}$$

8.2.12. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη, γυρω απο τον αξονα των x, του τμηματος του κυκλου $x^2 + y^2 = 9$ που αντιστοιχει στα σημεια $(3, 0)$ και $\left(3/2, 3\sqrt{3}/2\right)$.

Λυση. Τα σημεια $(3, 0)$ και $\left(3/2, 3\sqrt{3}/2\right)$ ανηκουν στον κυκλο, οπως μπορει ευκολα να επαληθευτει με αντικατασταση στην εξισωση $x^2 + y^2 = 9$. Αν θεωρησουμε την παραμετριση του κυκλου: $x(t) = 3\cos t$ και $y(t) = 3\sin t$, βλεπουμε οτι οι αντιστοιχες τιμες του t ειναι $t_1 = 0$ και $t_2 = \pi/3$. Ο τυπος για το εμβαδον επιφανειας εκ περιστροφης γυρω απο τον αξονα x, ειναι

$$E = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Οποτε στο συγκεκριμενο προβλημα εχουμε

$$E = 2\pi \int_0^{\pi/3} 3\sin t \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi/3} 3\sin t dt = 9\pi.$$

8.3 Αλυτα Προβληματα

8.3.1. Σχεδιασε την καμπυλη και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

1. $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ (και ο αξονας των x). *Απ.* 3π.
2. $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$. *Απ.* $3\pi/8$.
3. $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$. *Απ.* πab.
4. $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$. *Απ.* 6π.
5. $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 3t - t^3$. *Απ.* $72\sqrt{3}/5$.
6. Ενας βροχος της $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t^3 - t$. *Απ.* $8/15$.
7. $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$. *Απ.* 8.

8.3.2. Σχεδιασε την καμπυλη και υπολογισε το το μηκος της

1. $x(t) = t^6/6$, $y(t) = 2 - t^4/4$ (και οι αξονες των x και y). *Απ.* $13/3$.
2. $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t^3}{3} - t$ (και ο αξονας των x). *Απ.* $4/\sqrt{3}$.
3. $x(t) = e^t\cos t$, $y(t) = e^t\sin t$ $(0 \leq t \leq \pi)$. *Απ.* $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$.
4. $x(t) = \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)$, $y(t) = \tan^{-1} t$ $(0 \leq t \leq 1)$. *Απ.* $\ln(\sqrt{2} + 1)$.
5. $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) + 1$, $y(t) = 2\sin t + \sin 2t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$. *Απ.* 16.
6. $x(t) = \frac{t^2}{2}$, $y(t) = \frac{1}{9}(6t + 9)^{3/2}$ $(0 \leq t \leq 4)$. *Απ.* 20 .
7. $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = \sin^3(t)$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$. *Απ.* $3/2$.
8. $x(t) = \cos(t) + t\sin(t)$, $y(t) = \sin t - t\cos t$ $(\pi/6 \leq t \leq \pi/4)$. *Απ.* $5\pi^2/288$.
9. $x(t) = \ln(\sin(t))$, $y(t) = t$ $(\pi/6 \leq t \leq \pi/2)$. *Απ.* $\ln(2 + \sqrt{3})$.

8.3.3. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης γυρω απο τον αξονα των x.

1. $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $t \in [0, \pi]$.
2. $x(t) = a \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. *Απ.* $5\pi^2 a^3$.
3. $x(t) = a \cdot \cos^3(t)$, $y(t) = a \cdot \cos^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. *Απ.* $\frac{32}{105}\pi a^3$.

8.3.4. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης γυρω απο τον αξονα των x.

1. $x(t) = t,\ y(t) = 2t,\ t \in [0, 4]$. *Απ.* $32\pi\sqrt{5}$.
2. $x(t) = e^t \sin t,\ y(t) = e^t \cos t,\ t \in [0, \pi/2]$. *Απ.* $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi - 2)$.
3. $x(t) = a \cdot \cos^3(t),\ y(t) = a \cdot \cos^3(t),,\ t \in [0, 2\pi]$. *Απ.* $\frac{12}{5}\pi a^2$.

8.3.5. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης γυρω απο τον αξονα των y.

1. $x(t) = 3 + 2t,\ y(t) = 9 - 3t,\ t \in [1, 4]$.
2. $x(t) = 3\cos(\pi t),\ y(t) = 5t + 2,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $x(t) = t^2 + 3,\ y(t) = t^2 + 2,\ t \in [0, 5]$.

8.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

8.4.1. Δινεται η καμπυλη με παραμετρικη αναπαρασταση $x(t) = \frac{1}{\cosh t}$, $y(t) = t - \tanh t$. Κανε την γραφικη της παρασταση.

8.4.2. Δινεται η καμπυλη με παραμετρικη αναπαρασταση $x(t) = at$, $y(t) = \frac{a}{1+t^2}$, $a > 0$. Κανε την γραφικη της παρασταση. Τι παρατηρεις για τις διαφορες τιμες του a;

8.4.3. Δινεται η καμπυλη με παραμετρικη αναπαρασταση $x(t) = \sin(mt + \partial)$, $y(t) = \sin(nt)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Κανε την γραφικη της παρασταση για διαφορες τιμες των m, n. (Μαλλον θα σου ειναι απαραιτητη η χρηση μαθηματικου λογισμικου.) Τι παρατηρεις για τις διαφορες τιμες των m, n;

8.4.4. Δινεται η καμπυλη με εξισωση $x^3 + y^3 = 3xy$.

1. Βρες μια παραμετρικη αναπαρασταση αυτης $(x(t), y(t))$.
2. Κανε την γραφικη της παρασταση.

8.4.5. Δινεται η καμπυλη με εξισωση $x^n + y^n = 1$, $n = 2k \in \mathbb{N}$.

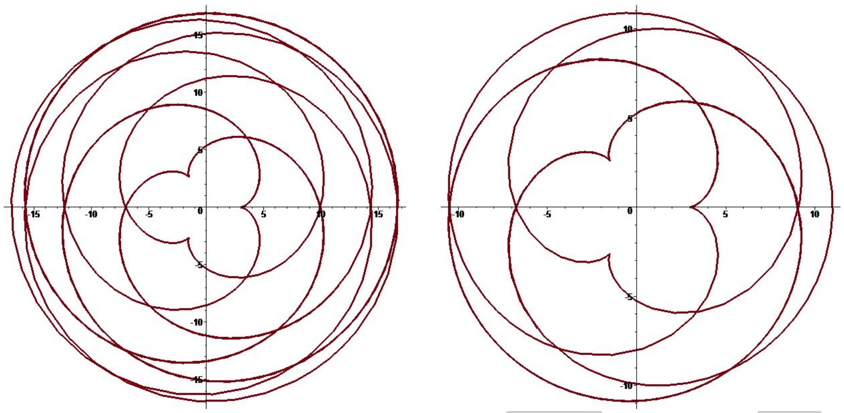
1. Βρες μια παραμετρικη αναπαρασταση αυτης $(x(t), y(t))$.
2. Κανε την γραφικη της παρασταση για διαφορες τιμες του n.
3. Τι παρατηρεις καθως $n \to \infty$;
4. Τι συμβαινει οταν $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$;

8.4.6. Δινονται δυο καμπυλες με παραμετρικες εξισωσεις:

1. $x(t) = (a - b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)$, $y(t) = (a - b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)$.

2. $x(t) = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)$, $y(t) = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)$.

Οι γραφικες των παραστασεις οταν ($a = 3$, $b = 7$) ειναι οι εξης:

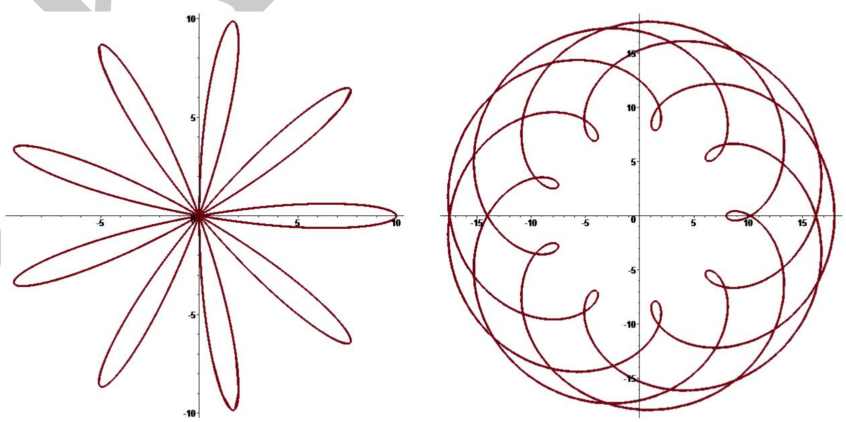


Ποια ειναι η γραφικη παρασταση καθε καμπυλης; Ποια ειναι η γεωμετρικη σημασια των a, b; Χρησιμοποιησε μαθηματικο λογισμικο για να κανετε την γραφικη παρασταση των καμπυλων για διαφορες τιμες $a, b \in \mathbb{N}$.

8.4.7. Δινονται δυο καμπυλες με παραμετρικες εξισωσεις:

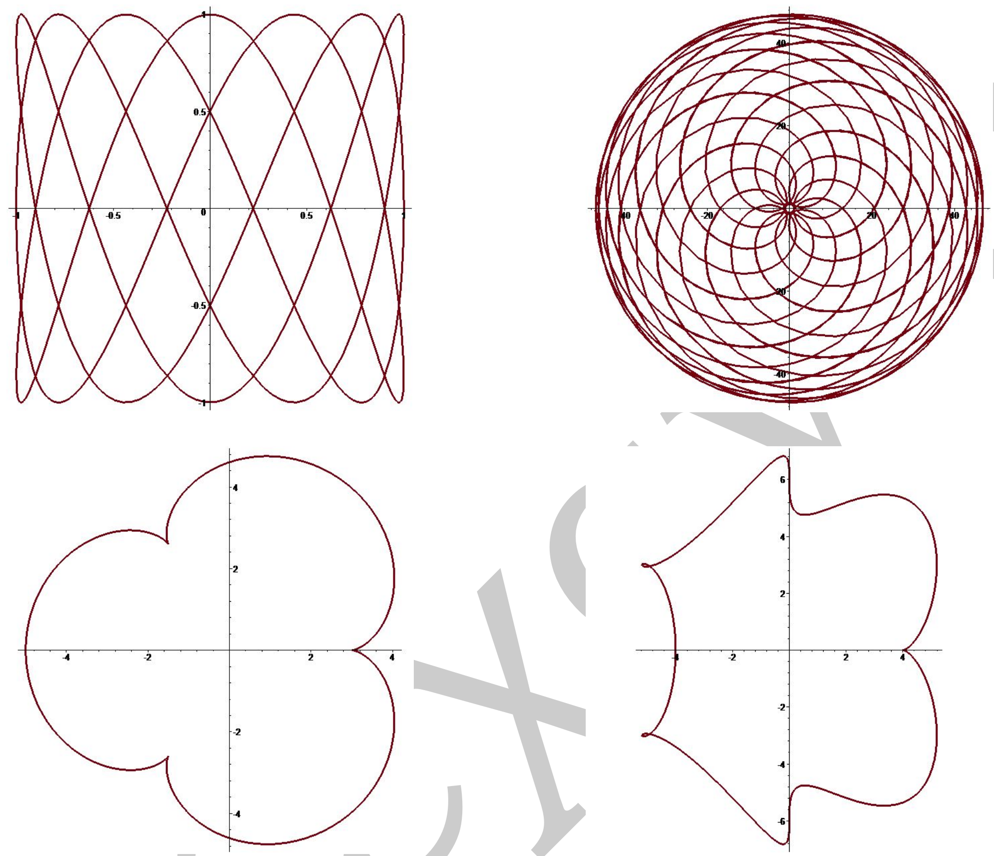
1. $x(t) = (a-b)\cos t + c\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)$, $y(t) = (a-b)\sin t - c\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)$.
2. $x(t) = (a+b)\cos t - c\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)$, $y(t) = (a+b)\sin t - c\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)$.

Οι γραφικες των παραστασεις οταν ($a = 9$, $b = 4$, $c = 5$) ειναι οι εξης:



Ποια ειναι η γραφικη παρασταση καθε καμπυλης; Ποια ειναι η γεωμετρικη σημασια των a, b, c; Χρησιμοποιησε μαθηματικο λογισμικο για να κανετε την γραφικη παρασταση των καμπυλων για διαφορες τιμες $a, b, c \in \mathbb{N}$.

8.4.8. Αντιστοιχισε τις παρακατω γραφικες παραστασεις



στις συναρτησεις – μπορεις χωρις χρηση μαθηματικου *λογισμικου*;

1. $x(t) = 24\cos t - 23\cos\frac{24t}{13}$, $y(t) = 24\sin t - 23\sin\frac{24t}{13}$.
2. $x(t) = 5\cos t - \cos 5t$, $y(t) = 6\sin t - \sin 6t$.
3. $x(t) = 4\cos t - \cos 4t$, $y(t) = 4\sin t - \sin 4t$.
4. $x(t) = \cos 3t$, $y(t) = \sin 7t$.

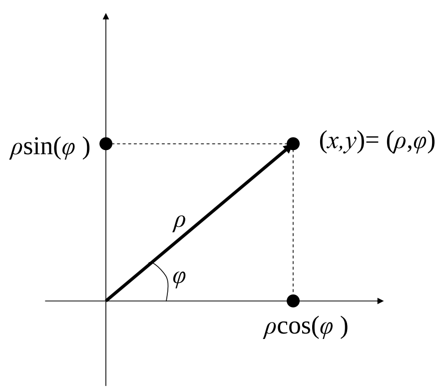
Κεφάλαιο 9

Πολικες Συντεταγμενες

Είναι γνωστό ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε την θέση ενός σημείου στο επίπεδο με χρήση *Καρτεσιανων* συντεταγμενων (x, y). Ομως υπαρχουν και άλλα εναλλακτικα *συστηματα συντεταγμενων*. Στο παρον κεφαλαιο θα ασχοληθούμε με το συστημα των *πολικων συντεταγμενων*.

9.1 Θεωρια και Παραδειγματα

9.1.1. Ορισμος: Το σημειο του επιπεδου με *πολικες συντεταγμενες* (ρ, ϕ) οριζεται ως εξης. Εστω ενα ευθυγραμμο τμημα μηκους ρ το οποιο σχηματιζει γωνια ϕ με την ημιευθεια Ox. Τοτε το περας του ευθυγραμμου τμηματος ειναι το σημειο με πολικες συντεταγμενες (ρ, ϕ). Δες το Σχημα 9.1.



Σχ.9.1: Πολικες συντεταγμενες.

Για να αντιμετωπισουμε το γεγονος οτι το ιδιο σημειο μπορει να προσδιοριστει απο διαφορετικες γωνιες ϕ_1, $\phi_2 = 2k\pi$, επιλεγουμε μια συγκεκριμενη περιοχη τιμων για το ϕ. Συνηθως χρησιμοποιουμε ειτε $[0, 2\pi)$ ειτε $[-\pi, \pi)$ αλλα σε συγκεκριμενα προβληματα καποια αλλη επιλογη μπορει να ειναι καταλληλοτερη.

9.1.2. Θεωρημα: Η σχεση που υπαρχει μεταξυ των *καρτεσιανων* συντεταγμενων (x, y) και των πολικων συντεταγμενων (ϕ, ρ) ειναι η εξης:

$$x = \rho \cos \phi, \qquad y = \rho \sin \phi$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Αποδειξη. Αμεση απο το Σχημα 9.1.

9.1.3. Ασκηση: Βρες τις πολικες συντεταγμενες του σημειου με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(x, y) = (1, 1)$. Το ιδιο για το σημειο $(1, 0)$.
Λύση. Για το (x, y)=$(1, 1)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \phi = \arctan\frac{1}{1} = \pi/4,$$

δηλ. $(\rho, \phi) = \left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$. Για το (x, y)=$(1, 0)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1}, \quad \phi = \arctan\frac{0}{1} = 0,$$

δηλ. $(\rho, \phi) = (1, 0)$.

9.1.4. Ασκηση: Βρες τις Καρτεσιανες συντεταγμενες του σημειου με πολικες συντεταγμενες $(\rho, \phi) = (2, \pi/3)$. Το ιδιο για το σημειο $(1, 0)$.
Λύση. Για το (ρ, ϕ)=$(2, \pi/3)$ εχουμε

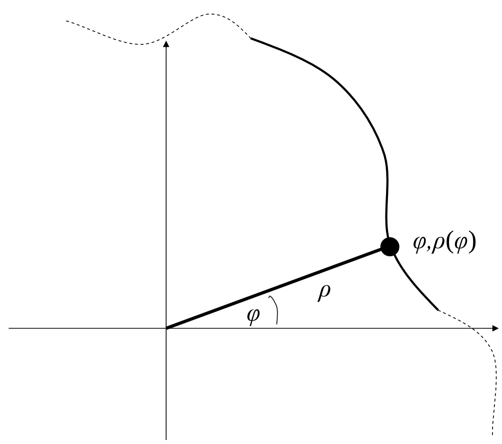
$$x = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$
$$y = \rho \sin \phi = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

δηλ. $(x, y) = \left(1, \sqrt{3}\right)$. Για το (ρ, ϕ)=$(1, 0)$ εχουμε

$$x = \rho \cos \phi = 1 \cos 0 = 1,$$
$$y = \rho \sin \phi = 1 \sin 0 = 0,$$

δηλ. $(x, y) = (1, 0)$.

9.1.5. Παρατηρηση: Μια καμπυλη μπορει να αναπαρασταθει απο μια συναρτηση $\rho = \rho(\phi)$. Σε καθε ϕ αντιστοιχει τιμη $\rho(\phi)$ και σημειο $(\phi, \rho(\phi))$. Δες το Σχημα 9.2.



Σχ.9.2: Πολικες συντεταγμενες.

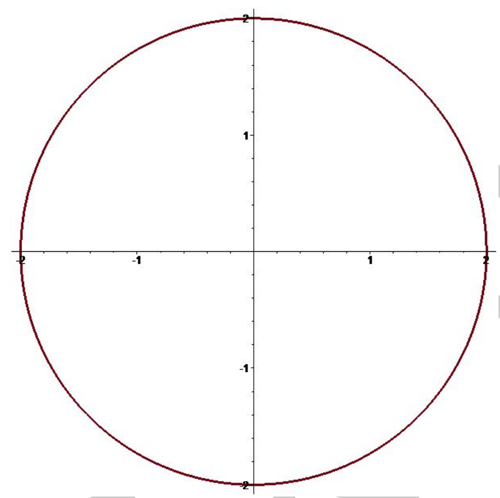
9.1.6. Παραδειγμα: Η καμπύλη με $\rho(\phi) = 2$ ειναι ο κυκλος με κεντρο το $(0, 0)$ και ακτινα $R = 2$. Αυτο ισχυει διοτι τυχον σημειο της καμπυλης εχει συντεταγμενες

$$x = 2\cos\phi, \quad y = 2\sin\phi,$$

οποτε

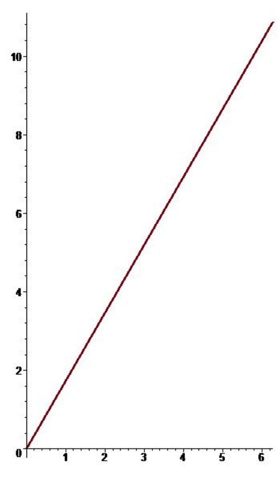
$$x^2 + y^2 = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4.$$

Δες και το Σχήμα 9.3.



Σχ.9.3: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = 2$.

9.1.7. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\phi(\rho) = \pi/3$.
Λύση. Οποιοδήποτε σημείο A της καμπύλης έχει την μορφή $(\rho, \pi/3)$, δηλαδή η γωνία AOx είναι πάντα ίση με $\pi/3$. Άρα η καμπύλη είναι μια ημιευθεία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.4.

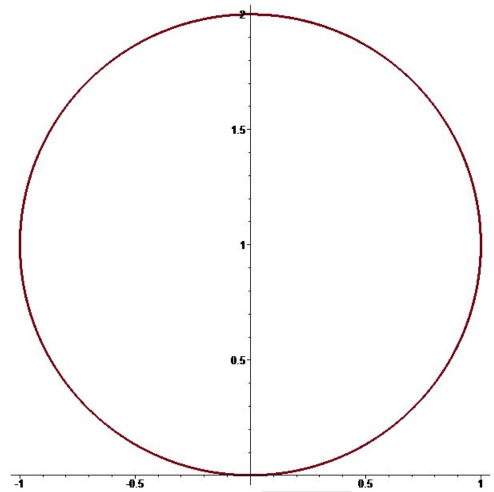


Σχ.9.4: Η καμπύλη με εξίσωση $\phi(\rho) = \pi/3$.

9.1.8. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = 2\sin\phi$.
Λύση. Παρατηρούμε ότι $x = \rho\cos\phi = 2\sin\phi\cos\phi$, $y - 1 = \rho\sin\phi - 1 = 2\sin^2\phi - 1$ και

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= (2\sin\phi\cos\phi)^2 + \left(2\sin^2\phi - 1\right)^2 \\ &= 4\cos^2\phi\sin^2\phi + 4\sin^4\phi - 4\sin^2\phi + 1 \\ &= 4\left(1-\sin^2\phi\right)\sin^2\phi + 4\sin^4\phi - 4\sin^2\phi + 1 = 1 \end{aligned}$$

Οπότε η καμπύλη είναι κύκλος με κέντρο το $(0,1)$ και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.5.

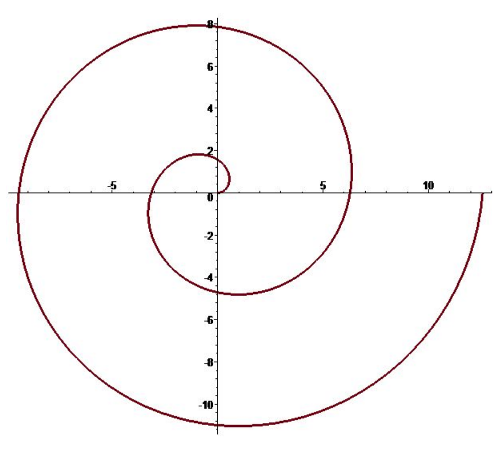


Σχ.9.5: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = 2\sin\phi$.

9.1.9. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = \phi$.
Λύση. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

ϕ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$
$\rho(\phi) = \phi$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$

Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο αυξάνει η γωνία ϕ τόσο μεγαλώνει και η ακτίνα $\rho(\phi)$, και έτσι σχηματίζεται μία *σπείρα*, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.6.

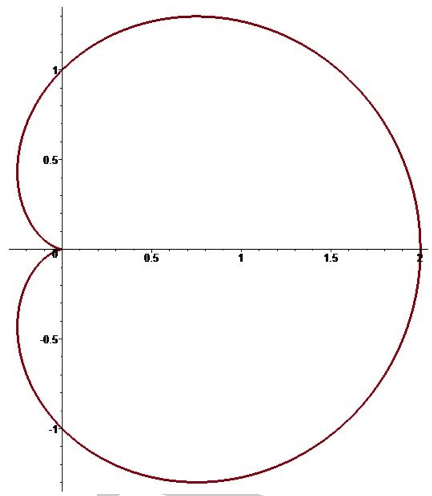


Σχ.9.6: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = \phi$.

9.1.10. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = 1 + \cos\phi$.
Λύση. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

ϕ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\rho(\phi) = 1 + \cos\phi$	2.000	1.707	1.000	0.292	0.000	0.292	1.000	1.707	2.000

Τοποθετώντας αυτά τα σημεία στο επίπεδο παίρνουμε το Σχήμα 9.7. Η καμπύλη αυτή λέγεται *καρδιοειδής*.

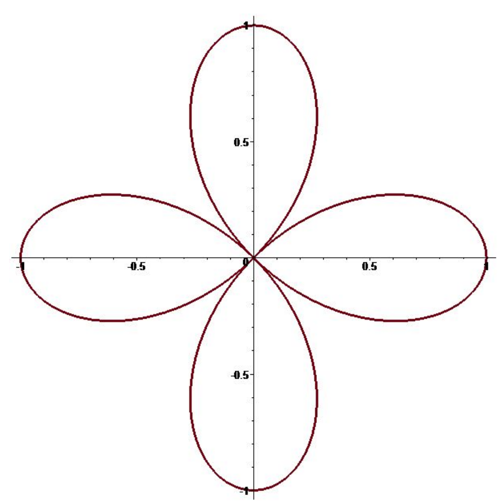


Σχ.9.7: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = 1 + \cos\phi$.

9.1.11. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = \cos 2\phi$.
Λύση. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\rho(\phi) = \cos 2\phi$	1	0.707	0	−0.707	−1	−0.707	0	0.707	1

Μπορούμε να συμπληρώσουμε επιπλέον σημεία στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$, τα οποία θα είναι συμμετρικά των παραπάνω ως προς τον αξονα των x. Τοποθετώντας αυτά τα σημεία στο επίπεδο παίρνουμε το Σχήμα 9.8. Η καμπύλη αυτή λέγεται *τετράφυλλο*.

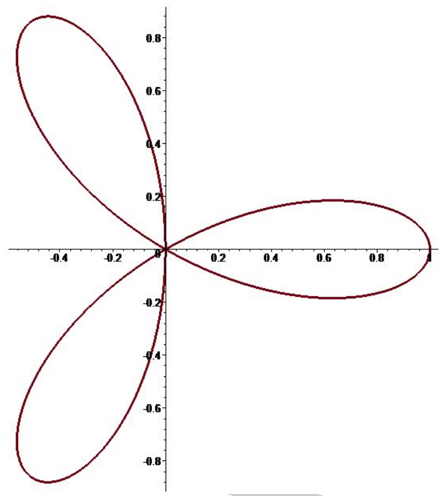


Σχ.9.8: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = \cos 2\phi$.

9.1.12. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = \cos 3\phi$.
Λύση. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/4$	π
$\rho(\phi) = \cos 3\phi$	1	0.382	−0.707	−0.923	0	0.923	0.707	−0.382	−1

Τοποθετώντας αυτά τα σημεία στο επίπεδο παίρνουμε το Σχήμα 9.9. Η καμπύλη αυτή λέγεται *τρίφυλλο*.



Σχ.9.9: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = \cos 3\phi$.

9.1.13. Ασκηση: Βρες την εξισωση της παραβολης $y = x^2$ σε πολικες συντεταγμενες.
Λύση. Εχουμε

$$y = x^2 \Rightarrow \rho \sin\phi = \rho^2 \cos^2\phi \Rightarrow \rho = \frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}.$$

Αυτη ειναι η ζητουμενη εξισωση.

9.1.14. Ασκηση: Περιγραψε την καμπυλη με εξισωση

$$\rho = \frac{6}{\sqrt{9 - 5\sin^2\phi}}.$$

Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \frac{36}{9 - 5\sin^2\phi} \Rightarrow \rho^2\left(9 - 5\sin^2\phi\right) = 36 \\
&\Rightarrow 9\rho^2 - 5\rho^2\sin^2\phi = 36 \Rightarrow 9\left(x^2 + y^2\right) - 5y^2 = 36 \\
&\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Οποτε η καμπυλη ειναι μια ελλειψη.

9.1.15. Ασκηση: Περιγραψε την καμπυλη με εξισωση

$$\rho = \cos\phi + \sin\phi.$$

Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
&\rho = \cos\phi + \sin\phi \\
&\quad\Rightarrow \rho^2 = \rho\cos\phi + \rho\sin\phi \\
&\quad\Rightarrow x^2 + y^2 = x + y \\
&\quad\Rightarrow \left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 2\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \\
&\quad\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Οποτε η καμπυλη ειναι ενας κυκλος με κεντρο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτινα $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9.1.16. Ασκηση: Βρες τα σημεια τομης των καμπυλων

$$\rho_1 = 1 + \sin^2\phi, \quad \rho_2 = 1 - \sin^2\phi.$$

Λύση. Θα εχουμε

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow 1 + \sin^2\phi = 1 - \sin^2\phi \Rightarrow 2\sin^2\phi = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0.$$

Οποτε $\phi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και τα σημεια τομης ειναι

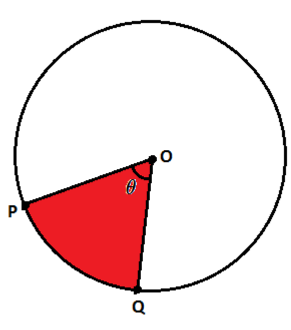
$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= \left(\left(1 + \sin^2(0)\right)\cos(0), \left(1 + \sin^2(0)\right)\sin(0)\right) = (1, 0), \\
(x_0, y_0) &= \left(\left(1 + \sin^2(\pi)\right)\cos(\pi), \left(1 + \sin^2(\pi)\right)\sin(\pi)\right) = (-1, 0).
\end{aligned}$$

(Για ολες τις αλλες τιμες του k παιρνουμε τα ιδια σημεια.)

9.1.17. Θεωρημα: Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε σε πολικες συντεταγμνες $(\phi, \rho(\phi))$ και οταν το ϕ παιρνει τιμες απο ϕ_1 ως ϕ_2, η καμπυλη περικλειει ενα *χωριο*. Τοτε το εμβαδο του χωριου δινεται απο τον τυπο

$$A = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2(\phi)d\phi. \tag{9.1}$$

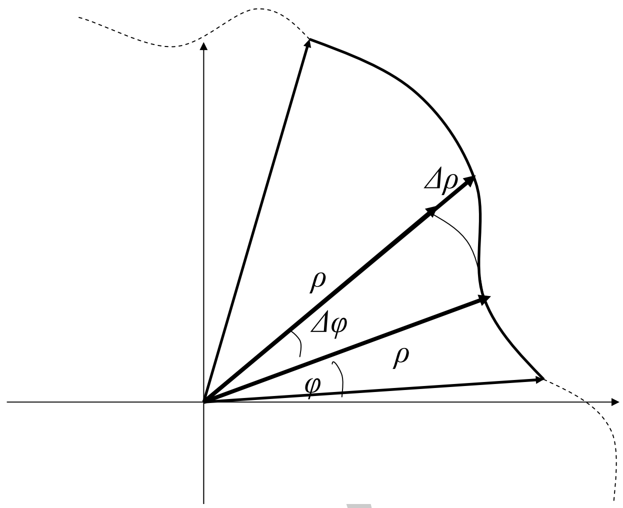
Αποδειξη. Για να υπολογισουμε το ζητουμενο εμβαδον χρειαζομαστε τον τυπο που δινει το *εμβαδον κυκλικου τομεα* γωνιας ϕ. Οπως φαινεται στο Σχημα 9.10 για κυκλο ακτινας R, το εμβαδον δινεται απο τον τυπο $E = \frac{\phi}{2}R^2$.



Σχ.9.10: Εμβαδον κυκλικου τομεα.

Ετσι, π.χ., ο κυκλος ειναι κυκλικος τομεας γωνιας $\phi = 2\pi$ και εχει εμβαδον $E = \frac{2\pi}{2}R^2 = \pi^2 R$· το ημικυκλιο ειναι κυκλικος τομεας γωνιας $\phi = \pi$ και εχει εμβαδον $E = \frac{\pi}{2}R^2$ κ.τ.λ.

Τωρα ας συμβολισουμε με $A(\phi_1)$ το εμβαδον που περιεχεται μεταξυ της καμπυλης $\rho(\phi)$ και τον ημιυθειων με γωνιες $\phi_0 = 0$ και τυχουσα ϕ. Δες το σχημα 9.11.



Σχ.9.11: Υπολογισμος του στοιχειωδους εμβαδου σε πολικες συντεταγμενες.

Ας υποθεσουμε οτι το ϕ μεταβαλλεται και γινεται $\phi + \Delta\phi$. Αν *προσεγγισουμε* το προστιθεμενο κομματι εμβαδου με ενα κυκλικο τομεα ακτινας $\rho(\phi)$ και γωνιας $\Delta\phi$ (δες το Σχημα 9.11) τοτε η μεταβολη του εμβαδου ειναι προσεγγιστικα

$$A(\phi + \Delta\phi) - A(\phi) \simeq \frac{1}{2}\rho^2(\phi)\Delta\phi.$$

Οποτε

$$\frac{A(\phi + \Delta\phi) - A(\phi)}{\Delta\phi} \simeq \frac{1}{2}\rho^2(\phi) \Rightarrow \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{A(\phi + \Delta\phi) - A(\phi)}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{2}\rho^2(\phi) \Rightarrow$$
$$\frac{dA}{d\phi} = \frac{1}{2}\rho^2(\phi) \Rightarrow A(\phi) = \int \frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,d\phi + c = \int_0^{\phi}\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)\,d\vartheta + c.$$

Επειδη $A(0) = 0$ (γιατι;) θα ειναι $c = 0$. Εστω A_1 το εμβαδον που περικλειεται μεταξυ των ημιευθειων $\phi_0 = 0$ και $\phi = \phi_1$ και A_2 αυτο που περικλειεται μεταξυ των ημιευθειων $\phi_0 = 0$ και $\phi = \phi_2$. Θα εχουμε

$$A_1 = \int_0^{\phi_1}\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)\,d\vartheta, \quad A_2 = \int_0^{\phi_2}\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)\,d\vartheta$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$A = A_2 - A_1 = \int_0^{\phi_2}\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)\,d\vartheta - \int_0^{\phi_1}\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)\,d\vartheta = \int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)\,d\vartheta.$$

9.1.18. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη με εξισωση $\rho(\phi) = \cos 2\phi$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Λύση. Η καμπύλη ειναι ενα τετραφυλλο (δες το Σχημα 9.8). Το εμβαδον ειναι

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 2\phi d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 4\phi}{2} d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

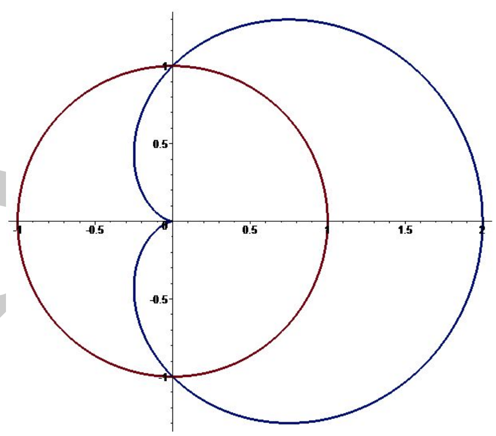
9.1.19. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη $\rho(\phi) = a \cdot (1+\cos\phi)$, $\phi \in [-\pi, \pi]$.

Λύση. Είναι η *καρδιοειδης* καμπύλη που φαίνεται στο Σχημα 9.7. Η καμπυλη ειναι συμμετρικη ως προς τον αξονα των x, οποτε θα υπολογισουμε το εμβαδον για $\phi \in [0, \pi]$ και θα το διπλασιασουμε για να παρουμε το τελικο αποτελεσμα. Εχουμε

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos\phi)^2 \, d\phi = a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi\right) d\phi \\ &= a^2 \cdot \left(\int_0^{\pi} d\phi + \int_0^{\pi} 2\cos\phi d\phi + \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\phi}{2} d\phi\right) = a^2 \cdot \left(\pi + 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

9.1.20. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον εκτος του κυκλου $\rho_1 = 1$ και εντος της καρδιοειδους $\rho_2 = 1 + \cos\phi$.

Λύση. Δες το σχημα 9.12.



Σχ.9.12: Υπολογισμος του εμβαδου μεταξυ των $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1 + \cos\phi$.

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι $A = A_1 - A_2$ οπου

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos\phi)^2 \, d\phi = \frac{3}{4}\pi + 2, \\ A_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} d\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\frac{3\pi}{4} + 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2$$

9.1.21. Θεωρημα: Εστω καμπυλη (δινεται σε σε πολικες συντεταγμνες) $\rho(\phi)$) με το ϕ να παιρνει τιμες απο ϕ_1 ως ϕ_2. Τοτε το μηκος της καμπυλης ειναι

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi. \tag{9.2}$$

Αποδειξη. Μπορουμε να γραψουμε την καμπυλη σε παραμετρικη μορφη, με παραμετρο το ϕ, ως εξης:

$$x(\phi) = \rho(\phi)\cos(\phi),$$
$$y(\phi) = \rho(\phi)\sin(\phi).$$

Γνωριζουμε οτι το μηκος τοξου παραμετρικης καμπυλης δινεται απο τον τυπο

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} d\phi.$$

Μπορουμε να απλοποιησουμε τον τυπο αυτο ως εξης. Εχουμε

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{d\rho}{d\phi}\cos\phi - \rho(\phi)\sin\phi$$
$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{d\rho}{d\phi}\sin\phi + \rho(\phi)\cos\phi$$

οποτε

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\phi}\cos\phi - \rho(\phi)\sin\phi\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\sin\phi + \rho(\phi)\cos\phi\right)^2$$
$$= \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + \rho^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) - 2\frac{d\rho}{d\phi}\rho\cos\phi\sin\cos\phi + 2\frac{d\rho}{d\phi}\rho\cos\phi\sin\cos\phi$$
$$= \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2.$$

Αρα το ζητουμενο μηκος δινεται απο οτν τυπο

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2 d\phi}.$$

9.1.22. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος της περιφερειας κυκλου με ακτινα R.

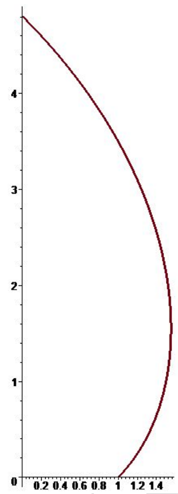
Λύση. Ο κυκλος με ακτινα R εχει εξισωση $\rho(\phi) = R$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Οποτε το μηκος της περιφερειας ειναι

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + (0)^2} d\phi = \int_0^{2\pi} R d\phi = 2\pi R$$

οπως και περιμεναμε.

9.1.23. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος του τμηματος της *εκθετικης σπειρας* με εξισωση $\rho(\phi) = e^{\phi}$ που αντιστοιχει σε $\phi \in [0, \pi/2]$.

Λύση. Δες το σχημα 9.13.



Σχ.9.13: Υπολογισμος του μηκους της $\rho(\phi) = e, \quad \phi \in [0, \pi/2]$.

Το ζητουμενο μηκος ειναι

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2}\, d\phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{4\phi} + 4e^{4\phi}}\, d\phi = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,(e^{\pi} - 1).$$

9.1.24. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος του τμηματος της καμπυλης με εξισωση $\rho(\phi) = 1/\phi$ που αντιστοιχει σε $\phi \in [1/2, 2]$.

Λύση. Το ζητουμενο μηκος ειναι

$$s = \int_{1/2}^{2} \sqrt{\frac{1}{\phi^2} + \left(-\frac{1}{\phi^2}\right)^2}\, d\phi = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{\phi}\sqrt{\frac{1+\phi^2}{\phi^2}}\, d\phi = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}\right|.$$

9.2 Λυμενα Προβληματα

9.2.1. Ασκηση: Βρες τις πολικες συντεταγμενες των σημειων με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(x, y) = \left(1, \sqrt{3}\right)$ και $(x, y) = \left(-1, -\sqrt{3}\right)$ και

Λύση. Για το (x, y)=$\left(1, \sqrt{3}\right)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \phi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \pi/3,$$

δηλ. $(\rho, \phi) = (2, \pi/3)$. Για το (x, y)=$\left(-1, -\sqrt{3}\right)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\phi = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Αυτο ομως δεν ειναι σωστο, επειδη το $\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ ανηκει στο 3ο τεταρτημοριο. Το σωστο αποτελεσμα ειναι $\phi=\frac{\pi}{3}+\pi$, δηλ. $(\rho,\phi)=\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$.

9.2.2. Ασκηση: Βρες τις Καρτεσιανες συντεταγμενες του σημειου με πολικες συντεταγμενες $(\rho,\phi)=(1,\pi/4)$. Το ιδιο για το σημειο $\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.
Λύση. Για το (ρ,ϕ)=$(1,\pi/4)$ εχουμε

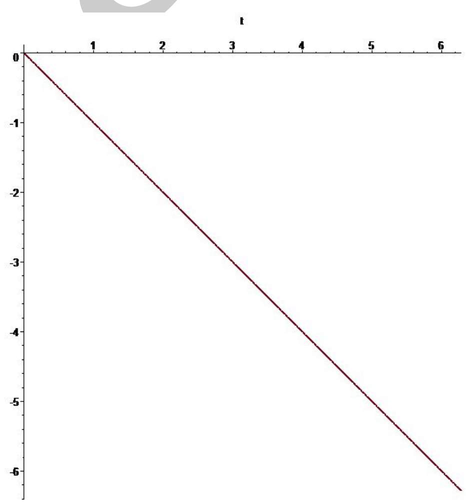
$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\phi=1\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y&=\rho\sin\phi=1\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

δηλ. $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Για το (ρ,ϕ)=$\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ εχουμε

$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\phi=\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},\\ y&=\rho\sin\phi=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

δηλ. $(x,y)=\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

9.2.3. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\phi(\rho)=-\pi/4$.
Λύση. Οποιοδήποτε σημείο Α της καμπύλης έχει την μορφή $(\rho,\pi/3)$, δηλαδή η γωνία AOx είναι πάντα ίση με $-\pi/4$. Άρα η καμπύλη είναι μια ημιευθεία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.14.



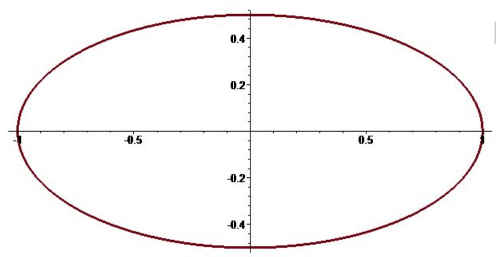
Σχ.9.14: Η καμπύλη με εξίσωση $\phi(\rho)=-\pi/4$.

9.2.4. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi)=2/\sqrt{4-3\cos^2\phi}$.

Λύση. Εχουμε

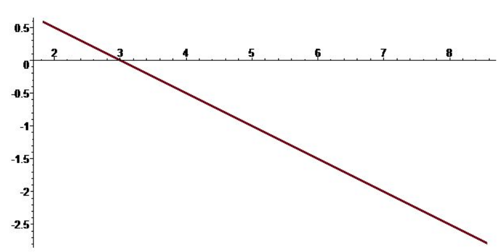
$$\begin{aligned}\rho^2 = \frac{4}{4-\cos^2\phi} &\Rightarrow 4\rho^2 - 3\rho^2\cos^2\phi = 4\\ &\Rightarrow 4\rho^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) - 3\rho^2\cos^2\phi = 4\\ &\Rightarrow 4\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = 4\\ &\Rightarrow \rho^2\cos^2\phi + \frac{1}{4}\rho^2\sin^2\phi = 1\\ &\Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.\end{aligned}$$

Οποτε η καμπυλη ειναι η ελλειψη του Σχηματος 9.15.



Σχ.9.15: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = 2/\sqrt{4-3\cos^2\phi}$.

9.2.5. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = \frac{3}{\cos\phi + 2\sin\phi}$.
Λύση. Εχουμε $\rho(\cos\phi + 2\sin\phi) = 3 \Rightarrow x + 2y = 3$, η οποια ειναι η ευθεια του Σχηματος 9.16.

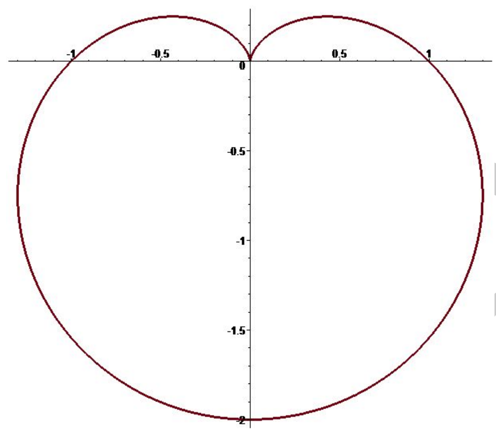


Σχ.9.16: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = \dfrac{3}{\cos\phi + 2\sin\phi}$.

9.2.6. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = 1 - \sin\phi$.
Λύση. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

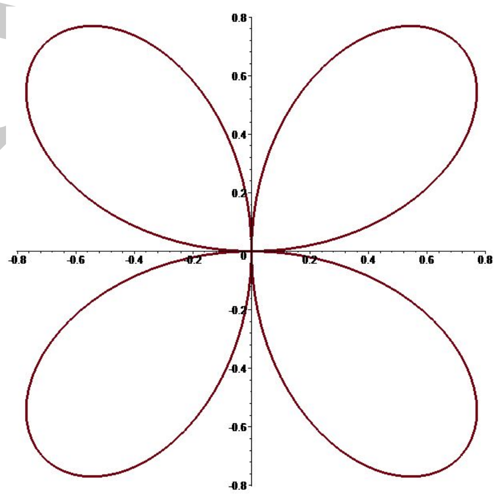
ϕ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\rho(\phi) = 1 - \sin\phi$	1.000	0.292	0.000	0.292	1.000	1. 707	2.000	1.707	1.000

Τοποθετώντας αυτά τα σημεία στο επίπεδο παίρνουμε το Σχήμα 9.7, μια παραλλαγη της *καρδιοειδους*.



Σχ.9.17: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = 1 - \sin\phi$.

9.2.7. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = \cos 2\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)$.
Λύση. Ειναι μια παραλλαγη του τετραφυλλου του Σχηματος 9.8, στραμμενη αντιωρολογιακα κατα $\frac{\pi}{4}$.

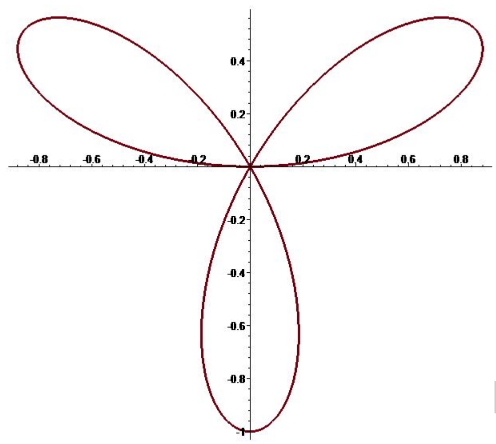


Σχ.9.18: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = \cos 2\left(\phi - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

9.2.8. Ασκηση: Σχεδιασε την καμπύλη $\rho(\phi) = \sin 3\phi$.
Λύση. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\rho(\phi) = \cos 3\phi$	0.000	0.382	0.707	0.923	1.000	0.923	0.707	0.382	0.000

Τοποθετώντας αυτά τα σημεία στο επίπεδο παίρνουμε το Σχήμα 9.19, ενα τρίφυλλο.



Σχ.9.19: Η καμπύλη με εξίσωση $\rho(\phi) = \sin 3\phi$.

9.2.9. Ασκηση: Βρες την εξισωση της υπερβολης $x^2 - y^2 = 1$ σε πολικες συντεταγμενες.
Λύση. Εχουμε

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \phi - \rho^2 \sin^2 \phi = 1 \Rightarrow \rho^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}.$$

Αυτη ειναι η ζητουμενη εξισωση.

9.2.10. Ασκηση: Περιγραψε την καμπυλη με εξισωση

$$\rho^2 = \frac{1}{\cos \phi \sin \phi}.$$

Λύση. Εχουμε

$$\rho^2 \cos \phi \sin \phi = 1 \Rightarrow xy = 1.$$

Οποτε η καμπυλη ειναι μια υπερβολη.

9.2.11. Ασκηση: Βρες τα σημεια τομης των καμπυλων

$$\rho_1 = 4 \sin 2\phi, \quad \rho_2 = 4 \cos 2\phi.$$

Λύση. Θα εχουμε

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow 4 \sin 2\phi = 4 \cos 2\phi \Rightarrow \tan 2\phi = 1 \Rightarrow 2\phi = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Ομως η τιμη $\phi = -\frac{\pi}{4}$ απορριπτεται, διοτι θα εδινε $0 \leq \rho_1 = 4 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Οποτε ενα σημειο τομης ειναι το $(\rho, \phi) = \left(4, \frac{\pi}{4}\right)$, δηλ. το $(x, y) = \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$. Με γεωμετρικη αναλυση μπορουμε να καταλαβουμε οτι υπαρχει ενα ακομη σημειο τοης. Ποιο ειναι αυτο και γιατι δεν το ανακαλυψαμε με την παραπανω αναλυση;

9.2.12. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη $\rho(\phi) = \alpha(1+\sin\phi)$, $\phi \in [-\pi, \pi]$.

Λύση. Εχουμε

$$A = \frac{\alpha^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\sin\phi)^2\,d\phi = \frac{\alpha^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\sin\phi+\sin^2\phi\right)d\phi$$
$$= \alpha^2\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\phi + \int_{-\pi}^{\pi}2\sin\phi d\phi + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2\phi}{2}d\phi\right) = \alpha^2\cdot\left(\pi+0+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi\alpha^2}{2}.$$

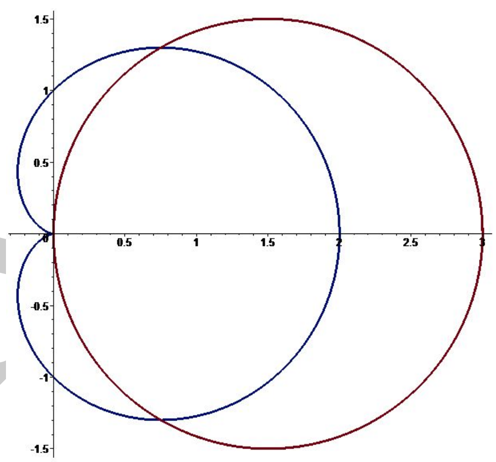
9.2.13. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη με εξισωση $\rho(\phi) = \cos^2\frac{\phi}{2}$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

Λύση. Το εμβαδον ειναι

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^4\frac{\phi}{2}d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos\phi}{2}\right)^2 d\phi = \frac{3\pi}{8}.$$

9.2.14. Ασκηση: Υπολογισε το εμβαδον της κοινης επιφανειας του κυκλου $\rho_1 = 3\cos\phi$ και της καρδιοειδους $\rho_2 = 1+\cos\phi$.

Λύση. Δες το σχημα 9.20.



Σχ.9.20: Η κοινη επιφανεια των $\rho_1 = 3\cos\phi$ και $\rho_2 = 1+\cos\phi$.

Τα σημεια τομης δινονται απο

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow 3\cos\phi = 1+\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι $A = A_1 + A_2$ οπου A_1 ειναι το εμβαδον του κυκλου $\rho_1 = 3\cos\phi$ για $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ και A_2 ειναι το εμβαδον της καρδιοειδους $\rho_2 = 1+\cos\phi$ για $\phi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Εχουμε

$$A_1 = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{2}(3\cos\phi)^2\,d\phi = \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3}$$
$$A_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1}{2}(1+\cos\phi)^2\,d\phi = \frac{1}{2}\pi + \frac{9}{8}\sqrt{3}.$$

Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$A = A_1 + A_2 = \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{9}{8}\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

9.2.15. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος του κυκλου $\rho(\phi) = 3\sin\phi$.

Λύση. Εχουμε

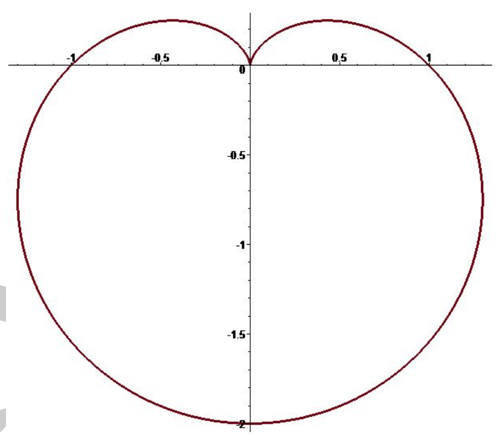
$$\rho = 3\sin\phi, \quad \frac{d\rho}{d\phi} = 3\cos\phi, \quad \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} = 9.$$

Οποτε το μηκος της περιφερειας ειναι

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2}\, d\phi = \int_0^{2\pi} 9 d\phi = 18\pi.$$

9.2.16. Ασκηση: Υπολογισε το μηκος της $\rho(\phi) = 1 - \sin 2\phi$ που αντιστοιχει σε $\phi \in [0, 2\pi]$.

Λύση. Δες το σχημα 9.21.



Σχ.9.21: Υπολογισμος του μηκους της $\rho(\phi) = 1 - \sin 2\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi]$.

Εχουμε

$$\rho = 1 - \sin\phi, \quad \frac{d\rho}{d\phi} = -\cos\phi,$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} &= \sqrt{(1-\sin\phi)^2 + (-\cos\phi)^2} \\
&= \sqrt{1 - 2\sin\phi + \sin^2\phi + \cos^2\phi} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1-\sin\phi} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Το ζητουμενο μηκος ειναι

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right| d\phi$$
$$= 4\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) d\phi = 9.$$

9.3 Αλυτα Προβληματα

9.3.1. Σχεδιασε την καμπυλη της $\rho(\phi)$ (με τα ορια του ϕ δοσμενα ή καταλληλα υπολογισμενα ωστε η καμπυλη να ειναι κλειστη) και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

1. Σπειρα $\rho = \phi$, για $0 \le \phi \le 2\pi$. *Απ.* $\frac{4}{3}\pi^3$.
2. Σπειρα $\rho = e^{\phi}$, για $0 \le \phi \le 2\pi$. *Απ.* $\frac{1}{4}e^{4\pi} - \frac{1}{4}$.
3. *Λημνισκος* $\rho^2 = \cos 2\phi$. *Απ.* 1.
4. $\rho = 1 - \cos 2\phi$. *Απ.* $3\pi/2$.
5. $\rho = 3 + \sin 2\phi$. *Απ.* $19\pi/8$.
6. $\rho = 2 - \cos 3\phi$. *Απ.* $3\pi/4$.
7. $\rho = \sin 2\phi$. *Απ.* $\pi/2$.
8. $\rho = |\cos 2\phi|$. *Απ.* $\pi/2$.
9. $\rho = |\sin 3\phi|$. *Απ.* $\pi/4$.
10. $\rho = \sin\phi + \cos\phi$. *Απ.* $\pi/2$.
11. $\rho = 1/\phi$, $\frac{\pi}{4} \le \phi \le 2\pi$. *Απ.* $7/4\pi$.
12. $\rho = \frac{3a\sin\phi\cos\phi}{\sin^3\phi + \cos^3\phi}$. *Απ.* $\frac{3}{2}a^2$.
13. $\rho = a\sin\phi\cos^2\phi$. *Απ.* $\frac{\pi a^2}{32}$.
14. $\rho = a\cos^3\phi$. *Απ.* $\frac{5\pi a^2}{32}$.
15. $\rho = 1 + 2\cos\phi$.
16. $\rho = 3 + 2\cos\phi$.
17. $\rho = 1 + 2\sin\phi$.
18. $\rho = 3 + 2\sin\phi$.
19. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\phi}}$.

20. $\rho = \arctan \frac{\varphi}{\pi}$.

9.3.2. Σχεδιασε και βρες το εμβαδόν μεταξυ των καμπυλων.

1. $\rho = \alpha(1 - \cos\varphi)$ και $\rho = \alpha$. *Απ.* $2\alpha^2\left(\frac{5\pi}{8} - 1\right)$.
2. $\rho = \alpha\sqrt{\cos 2\varphi}$ και $\rho = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. *Απ.* $\alpha^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. $\rho^2 = 1 + \cos\varphi$ και $\rho = \alpha\cos\varphi$. *Απ.* 4.

9.3.3. Σχεδιασε και βρες το εμβαδόν που περικλείει το τμήμα της καμπύλης $\rho = \alpha(1 - \cos\varphi)$ και βρίσκεται εντός του κύκλου $\rho = \alpha\cos\varphi$. *Απ.* $\alpha^2\left(\frac{7\pi}{12} - \sqrt{3}\right)$.

9.3.4. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος των καμπυλων. Οπου ειναι αναγκαιο υπολογισε τα ορια ωστε η καμπυλη να ειναι κλειστη.

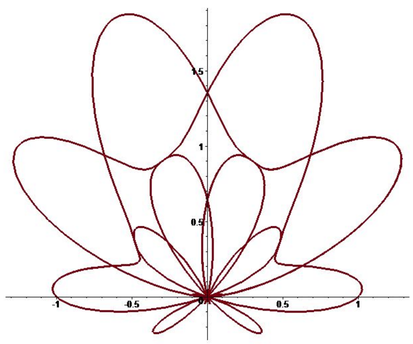
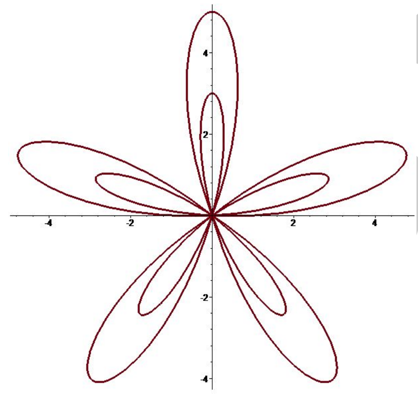
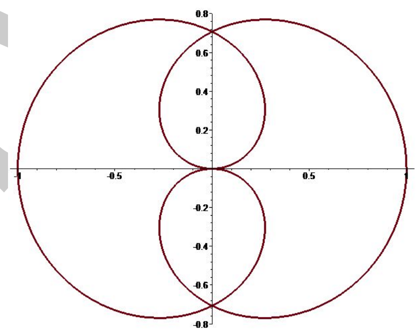
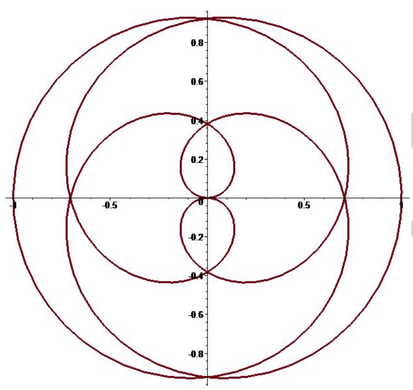
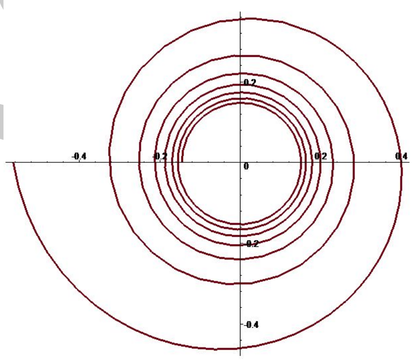
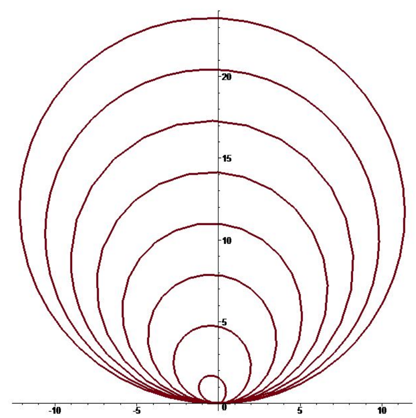
1. $\rho = 1/\varphi$, $3/4 \le \varphi \le 4/3$. *Απ.* $\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{12}$.
2. $\rho = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \ln 4$. *Απ.* $3\sqrt{2}$.
3. $\rho = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \sqrt{5}$. *Απ.* $\frac{19}{3}$.
4. $\rho = \frac{1}{\varphi}$, $\frac{3}{4} \le \varphi \le \frac{4}{3}$. *Απ.* $\frac{5}{12} + \ln\frac{3}{2}$.
5. $\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. *Απ.* $p\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$.
6. $\rho = 1 - \cos\varphi$. *Απ.* 8.
7. Η πρωτη περιελιξη της $\rho = \varphi$. *Απ.* $\pi \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2} \cdot \ln\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)$.
8. $\rho = \cos^2(\varphi)$. *Απ.* $3\pi/2$.
9. $\rho = \sin^3(\varphi/3)$. *Απ.* $3\pi/2$.
10. $\rho = \alpha\sin^3\frac{\varphi}{3}$. *Απ.* $\frac{3}{2}\pi\alpha$.
11. $\rho = \alpha\sin^4\frac{\varphi}{4}$. *Απ.* $\frac{4}{3}\pi\alpha$.
12. $\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $2 \le \rho \le 4$. *Απ.* $\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{19} + 4\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{7} + 2\right) - \sqrt{7} + 2\sqrt{19}$.

9.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

9.4.1. Κανε τις γραφικες παραστασεις των παρακατω συναρτησεων.

1. $\rho = \sin(6\phi)$.
2. $\rho = \sin(7\phi)$.
3. $\rho = 1 + \frac{1}{10}\sin(10\phi)$.

9.4.2. Αντιστοιχισε τις παρακατω γραφικες παραστασεις

στις συναρτησεις – μπορεις και χωρις χρηση μαθηματικου *λογισμικου*!

1. $\rho = \sin\frac{\phi}{2}$.
2. $\rho = \cos\frac{\phi}{4}$.
3. $\rho = \sin\phi + \sin^3\frac{5\phi}{2}$.
4. $\rho = \phi\cos\phi$.
5. $\rho = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$.
6. $\rho = 1 + 4\cos 5\phi$.

9.4.3. Μετατρεψε τις παρακατω εξισωσεις καμπυλων σε πολικες συσντεταγμενες. Κατοπιν σχεδιασε την καθε καμπυλη και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

1. $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)$. *Απ.* 1.
2. $(x^2+y^2)^2 = 4x^2+9y^2$. *Απ.* $\frac{13\pi}{2}$.
3. $(x^2+y^2)^3 = 4xy(x^2-y^2)$. *Απ.* 1.
4. $x^4+y^4 = x^2+y^2$. *Απ.* $\pi\sqrt{2}$.

Κεφάλαιο 10

Ακολουθιες

Μια *ακολουθια* ειναι μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το συνολο των φυσικων αριθμων $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

10.1 Θεωρια και Παραδειγματα

10.1.1. Ορισμος: Μια συναρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (δηλ. για $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $f(n) \in \mathbb{R}$) λεγεται *ακολουθια*.

10.1.2. Συμβολισμος: Ο n-στος ορος της ακολουθιας γραφεται $f(n)$ ή συνηθεστερα f_n. Για να δηλωσουμε ολοκληρη την ακολουθια γραφουμε $\mathbf{f}$ ή $(f_1, f_2, \ldots)$ ή $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ή απλα (f_n).

10.1.3. Ορισμος: Μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ λεγεται *φραγμενη* ανν υπαρχουν αριθμοι A, B τετοιοι ωστε $\forall n : A \leq f_n \leq B$.

10.1.4. Ασκηση: Δειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{2n^2+1}{3n^2}$ είναι φραγμένη.
Λύση. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n \geq 1$, ισχύει

$$0 < f_n = \frac{2n^2 + 1}{3n^2} \leq 1.$$

Το κάτω φράγμα είναι προφανές. Για το άνω φράγμα εχουμε

$$\left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2} - 1 \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{-3n^2 + 2n^2 + 1}{3n^2} \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(-3n^2 + 2n^2 + 1 \leq 0\right).$$

Αλλά

$$-3n^2 + 2n^2 + 1 = 1 - n^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n^2$$

το οποιο προφανως ισχυει για καθε $n \in \mathbb{N}$.

10.1.5. Ασκηση: : Δειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-1)^n n$ δεν είναι φραγμένη.
Λύση. Εστω οτι υπηρχαν A, B τετοια ωστε

$$\forall n : A \leq f_n \leq B.$$

Παιρνουμε n_B τετοιο ωστε $n_B > B$ και n'_B τετοιο ωστε $2n'_B \geq n_B$. Τοτε

$$n \geq n'_B \Rightarrow 2n \geq 2n'_B \geq n_B > B \Rightarrow f_{2n} = (-1)^{2n}\, 2n > B.$$

Αρα κανενα $B \in \mathbb{R}$ δεν μπορει να ειναι ανω φραγμα της (f_n). Ομοιως αποδεικνυουμε οτι η (f_n) δεν εχει κατω φραγμα.

10.1.6. Ορισμος: Μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ λεγεται *αυξουσα* (αντ. *φθινουσα*) ανν $\forall n : f_n \leq f_{n+1}$ (αντ. $\forall n : f_n \geq f_{n+1}$). Αν μια ακολουθια ειναι ειτε αυξουσα ειτε φθινουσα, λεγεται *μονοτονη*. Μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ λεγεται *γνησιως αυξουσα* (αντ. *γνησιως φθινουσα*) ανν $\forall n : f_n < f_{n+1}$ (αντ. $\forall n : f_n > f_{n+1}$). Αν μια ακολουθια ειναι ειτε γνησιως αυξουσα ειτε γνησιως φθινουσα, λεγεται *γνησιως μονοτονη*.

10.1.7. Ασκηση: Δειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}$ ειναι γνησιως φθινουσα.
Λύση. Εχουμε

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n < n+1) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} < f_n)$$

οποτε η (f_n) ειναι γνησιως φθινουσα.

10.1.8. Ασκηση: Είναι η ακολουθία με $f_n = \frac{n}{3^n}$ φραγμένη; Μονότονη;
Λύση. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_n > f_{n+1}$. Αρκεί να δείξουμε

$$\left(\forall \in \mathbb{N} : \frac{n}{3^n} > \frac{n+1}{3^{n+1}}\right) \Leftrightarrow \left(\forall \in \mathbb{N} : n > \frac{n+1}{3}\right) \Leftrightarrow (\forall \in \mathbb{N} : 2n > 1)\,.$$

Η τελευταία ανισότητα προφανώς ισχύει για καθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα. Επισης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_n > 0$. Άρα

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < f_n < f_1 = \frac{1}{3}$$

και η ακολουθία είναι φραγμένη.

10.1.9. Ορισμος: Λεμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *συγκλινει* (ή *τεινει*) στον αριθμο $\phi \in \mathbb{R}$ ανν

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \phi| < \varepsilon.$$

Τοτε γραφουμε «$\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$» (*το οριο της f_n ειναι το ϕ*).

10.1.10. Ασκηση: Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}$. Δειξε με ένα αριθμητικό επιχείρημα ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών (n, f_n). Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο γίνεται το n, τόσο εγγύτερα βρίσκεται το f_n στο 0. Αρα εικαζουμε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

n	1	10	100	1000	10000
$f_n = \frac{1}{n}$	1.0000	0.1000	0.0100	0.0010	0.0001

Ειναι φανερη η ομοιότητα του παραπανω πίνακα με αυτόν του Προβλήματος **;;**. Η σύγκλιση συναρτήσεων $f(x)$ ειναι ουσιαστικα ιδια με αυτη ακολουθιών f_n.

10.1.11. Ασκηση: Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}$. Αποδειξε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

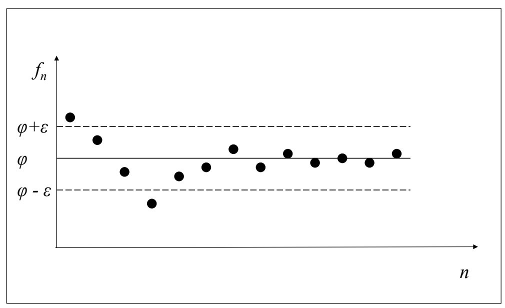
Λυση. Εστω τυχον $\varepsilon > 0$. Λαμβανω $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ οποτε $\varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon} > \frac{1}{n}$ για καθε $n \geq n_\varepsilon$. Οποτε

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \varepsilon > \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| = |f_n - 0| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

10.1.12. Ασκηση: Εξηγησε την σημασια της συνθηκης

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \varphi| < \varepsilon.$$

Λυση. Δες το σχημα.



Σχ.10.1: Γεωμετρικη ερμηνεια της συγκλισης μιας ακολουθιας.

Παρατηρησε οτι, για καθε $n \geq n_\varepsilon$, οι τιμες f_n βρισκονται μεσα σε μια «ζωνη» πλατους 2ε, γυρω απο την τιμη φ. Αυτο διατυπωνεται με την συνθηκη

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \varphi| < \varepsilon.$$

Επειδη εμεις επιλεγουμε την τιμη του ε, μπορουμε να κανουμε τη ζωνη οσο στενη θελουμε (δηλ. η παραπανω συνθηκη ισχυει για καθε $\varepsilon > 0$). Αλλα το n_ε για το οποιο θα ισχυει η παραπανω συνθηκη θα εξαρταται απο το ε, δηλ. για μικροτερο ε μπορει να χρειαστει να χρησιμοποιησουμε μεγαλυτερο n_ε.

10.1.13. Ορισμος: Λεμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *τεινει* στο $+\infty$ (ή οτι *το οριο της* f_n *ειναι το* $+\infty$) και γραφουμε $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$ ανν

$$\forall M > 0 : \exists n_M : n \geq n_M \Rightarrow f_n > M$$

Λεμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *τεινει* στο $-\infty$ (ή οτι *το οριο της* f_n *ειναι το* $-\infty$) και γραφουμε $\lim_{n\to\infty} f_n = -\infty$ ανν

$$\forall M < 0 : \exists n_M : n \geq n_M \Rightarrow f_n < M$$

10.1.14. Ασκηση: Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = n^2$. Δειξε με ένα αριθμητικό επιχείρημα ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών (n, f_n). Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο γίνεται το n, τόσο μεγαλυτερο γινεται το f_n. Οποτε εικαζουμε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$.

n	1	10	100	1000
$f_n = n^2$	1	100	10000	100000

10.1.15. Ασκηση: Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = n^2$. Αποδειξε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$.
Λυση. Εστω τυχον $M > 0$. Λαμβανω $n_M > \sqrt{M}$ οποτε $n_M^2 > M$ για καθε $n \geq n_M$. Οποτε

$$\forall n \geq n_M : f_n = n^2 > M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = \infty.$$

10.1.16. Συμβολισμος: Αν η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

1. τεινει στο $\phi \in \mathbb{R}$, λεμε οτι *συγκλινει* ή οτι ειναι *συγκλινουσα*·
2. *τεινει* ειτε στο $+\infty$ ειτε στο $-\infty$, λεμε οτι *αποκλινει* ή οτι ειναι *αποκλινουσα*·
3. δεν τεινει ουτε σε πραγματικο αριθμο ουτε στο $+\infty$ ουτε στο $-\infty$, λεμε οτι *ταλαντευεται.*

10.1.17. Ασκηση: Δειξε οτι η ακολουθια (f_n) με $f_n = (-1)^n$ ταλαντευεται.
Λύση. Πρεπει να δειξουμε οτι η (f_n) δεν τεινει σε κανενα οριο. Αφου η (f_n) ειναι φραγμενη (γιατι ;) δεν μπορει να τεινει ουτε στο ∞ ουτε στο $-\infty$. Ας υποθεσουμε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}$. Τοτε, αν επιλεξουμε $\varepsilon = \frac{1}{10}$, υπαρχει n_1 τετοιο ωστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{1}{10}.$$

Τοτε θα εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} + \frac{1}{10} &> \left|f_{n_1} - \phi\right| + \left|f_{n_1+1} - \phi\right| = \left|f_{n_1} - \phi\right| + \left|\phi - f_{n_1+1}\right| \\ &= \left|f_{n_1} - \phi + \phi - f_{n_1+1}\right| = \left|f_{n_1} - f_{n_1+1}\right| = \left|(-1)^{n_1} - (-1)^{n_1+1}\right| = 2\end{aligned}$$

που ειναι ατοπο. Αρα δεν μπορει να ισχυει $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}^*$, οποτε η (f_n) οντως ταλαντευεται.

10.1.18. Θεωρημα: Αν το όριο μιας ακολουθίας υπάρχει, είναι μοναδικό.

10.1.19. Θεωρημα: Μια μονοτονη και φραγμενη ακολουθια συγκλινει (σε πραγματικο αριθμο).

10.1.20. Παραδειγμα: Η (f_n) με $f_n = 1 + \frac{1}{n}$ ειναι φραγμενη (γιατι ;) και γνησιως φθινουσα (γιατι ;) και ισχυει $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

10.1.21. Ασκηση: Δειξε οτι η ακολουθια (f_n) με $f_n = 1 + \frac{1}{n!}$ συγκλινει σε καποιο οριο..
Λύση. Εχουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < 1 + \frac{1}{n!} \leq 2$$

και

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n = 1 + \frac{1}{n!} > 1 + \frac{1}{(n+1)!} = f_{n+1}.$$

Αφου η (f_n) ειναι φραγμενη και φθινουσα, υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

10.1.22. Ορισμος: Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και μια ακολουθία φυσικών αριθμών $n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}$. Σχηματίζουμε την ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ορίζοντας, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $g_k = f_{n_k}$. Τότε λέμε ότι η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια *υποακολουθία* της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

10.1.23. Παραδειγμα: Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-1)^n$. Οριζουμε την ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = f_{2n}$. Αρα η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια *υποακολουθία* της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Συγκεκριμενα εχουμε

$$(f_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$$
$$(g_n) = (1, 1, 1, 1, \ldots)$$

10.1.24. Παρατηρηση: Με άλλα λόγια, μια υποακολουθία της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μιά ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ που σχηματίζεται λαμβάνοντας όρους από τήν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

10.1.25. Θεωρημα: Κάθε φραγμενη ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία.

10.1.26. Παραδειγμα: Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-1)^n$. Οριζουμε την ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = f_{2n}$. Αρα η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια *υποακολουθία* της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Η

$$(f_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$$

ειναι ταλαντευομενη. Αλλα για την

$$(g_n) = (1, 1, 1, 1, \ldots)$$

ισχυει $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$.

10.1.27. Θεωρημα: Δινονται ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} g_n = \gamma \in \mathbb{R}$. Τοτε ισχυουν τα εξης.

1. Για καθε $k \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} (k \cdot f_n) = k \cdot \phi$.
2. $\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) = \phi + \gamma$.
3. $\lim_{n\to\infty} (f_n \cdot g_n) = \phi \cdot \gamma$.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f_n}{g_n}\right) = \frac{\phi}{\gamma}$, οταν $\gamma \neq 0$.

10.1.28. Παραδειγμα: Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = 1 + \frac{1}{n}$. Τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$. Οριζω την $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = 2f_n = 2 + \frac{2}{n}$. τοτε $\lim_{n\to\infty} g_n = 2 \lim_{n\to\infty} f_n = 2$.

10.1.29. Παραδειγμα: Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = 1 + \frac{1}{n}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = \frac{1}{n^2}$ Τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ και $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$. Οριζω την $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ με $h_n = f_n + g_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. τοτε

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g_n = 1.$$

10.1.30. Θεωρημα: Δινονται ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(h_n)_{n=1}^{\infty}$. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$, $\lim_{n\to\infty} g_n = \gamma$. Αν

$$\forall n : f_n \leq h_n \leq g_n$$

και υπαρχει το $\eta = \lim_{n\to\infty} h_n$, τοτε

$$\phi \leq \eta \leq \gamma.$$

10.1.31. Θεωρημα: Δινονται ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(h_n)_{n=1}^{\infty}$. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi = \lim_{n\to\infty} g_n = \gamma$. Αν

$$\forall n : f_n \leq h_n \leq g_n$$

τοτε υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} h_n$ και

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \eta.$$

10.1.32. Θεωρημα: Εστω $a \in \mathbb{R}$. Σχηματιζουμε την ακολουθια (f) με $f_n = a^n$.

1. Αν $|a| < 1$, τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.
2. Αν $a > 1$, Τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$.

10.1.33. Παρατηρηση: Πολλες φορες αποδεικνυουμε την υπαρξη του οριου μιας ακολουθιας χρησιμοποιωντας τα παραπανω θεωρηματα και / ή *τεχνασματα*, οπως θα δειξουμε στα επομενα παραδειγματα.

10.1.34. Ασκηση: Υπολογισε το οριο $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.

Λύση. Εχουμε ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = 1$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Τοτε και $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ και $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ (αφου $|a| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$). Οποτε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g_n = 1 + 0 = 1.$$

10.1.35. Ασκηση: Υπολογισε το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$.

Λύση. Είναι εύκολο να δείξουμε (επαγωγικά) ότι

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 < 3^n.$$

Οπότε

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{n}{3^n} < \frac{n}{n^2} < \frac{1}{n}$$

και

$$0 = \lim_{n\to 0} 0 < \lim_{n\to 0} \frac{n}{3^n} < \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} = 0.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$.

10.1.36. Ασκηση: Υπολογισε το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Λυση. Έχουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : -\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

οπότε

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$.

10.1.37. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0+0}{1+0}=0.$$

10.1.38. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1.$$

10.1.39. Ασκηση: Υπολογισε το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}$.
Λυση. Είναι

$$\frac{n^3-1}{n^2-1}=\frac{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}=n\frac{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}n\right)\left(\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\infty\cdot 1=\infty.$$

10.1.40. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1+0}=0.$$

10.1.41. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=0.\end{aligned}$$

10.1.42. Ασκηση: Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}f_n$ αν είναι γνωστό ότι για κάθε n ισχύει $\frac{n}{n+1}<f_n<\frac{n+1}{n+2}$.
Λυση. Έχουμε

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\leq\lim_{n\to\infty}f_n\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$$

οπότε $\lim_{n\to\infty}f_n=1$.

10.1.43. Παρατηρηση: Ενας αλλος τροπος υπολογισμου του οριου ακολυθιας δινεται απο το παρακατω θεωρημα.

10.1.44. Θεωρημα: Εστω συναρτηση $F(x)$ και ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = F(n)$. Τοτε

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \phi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = \phi.$$

10.1.45. Ασκηση: Υπολογισε το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.
Λύση. Θετουμε $F(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Εχουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to\infty}(x+1)'}{\lim_{x\to\infty}(x^2+1)'} = \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty} 2x} = 0.$$

Οποτε και $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$.

10.1.46. Θεωρημα:

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

10.2 Λυμενα Προβληματα

10.2.1. Δειξε ότι η ακολουθία με $f_n = \frac{2n+1}{3n^2}$ είναι φραγμένη.
Λύση. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n > 1$, ισχύει

$$0 < f_n = \frac{2n+1}{3n^2} < 1.$$

Το κάτω φράγμα είναι προφανές. Το άνω φράγμα ισχύει ανν

$$\left(\frac{2n+1}{3n^2} - 1 < 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{-3n^2+2n+1}{3n^2} < 0\right) \Leftrightarrow \left(-3n^2+2n+1 < 0\right).$$

Αλλά το $-3n^2+2n+1$ είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο με ρίζες $1, -\frac{1}{3}$ και αρνητικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Άρα λαμβάνει αρνητικές τιμές για κάθε n εκτός αυτών που ανήκουν στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, δηλ. για $n \in \{2, 3, ...\}$.

10.2.2. Δειξε ότι η ακολουθία με $f_n = \frac{2n^2+1}{3n}$ δεν είναι φραγμένη.
Λύση. Θα δείξουμε ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει n τέτοιο ώστε

$$f_n = \frac{2n^2+1}{3n} > M.$$

Πράγματι, αν θέσουμε $n = 2M$ έχουμε

$$f_n = \frac{2\cdot 4M^2+1}{3\cdot 2M} > \frac{2\cdot 4M^2}{3\cdot 2M} = \frac{8}{6}M > M.$$

10.2.3. Είναι η ακολουθία με $f_n = \frac{2n+1}{3n}$ φραγμένη;
Λύση. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n > 1$, ισχύει

$$0 < f_n = \frac{2n+1}{3n} < 1.$$

Το κάτω φράγμα είναι προφανές. Το άνω φράγμα ισχύει ανν

$$\left(\frac{2n+1}{3n}1 < 1\right) \Leftrightarrow (2n+1 < 3n) \Leftrightarrow (1 < n).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει εξ υποθέσεως.

10.2.4. Είναι η ακολουθία με $f_n = \frac{(-1)^n}{3n}$ φραγμένη;
Λύση. Έχουμε $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| = \left|\frac{(-1)^n}{3n}\right| = \frac{1}{3n} < 1$, οπότε

$$\forall n \in \mathbb{N} : -1 < f_n < 1.$$

10.2.5. Είναι η ακολουθία με $f_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ μονότονη;
Λύση. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_n > f_{n+1}$. Αρκεί να δείξουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+1}{n^2+1} > \frac{n+2}{(n+1)^2+1}.$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\forall \in \mathbb{N} : (n+1)(n+1)^2 + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 2n^2 + n + 2 = (n+2)\left(n^2+1\right)$$

δηλ. με την

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 2n > 0$$

η οποία προφανώς ισχύει. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

10.2.6. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{\sin n}{n}$ μονότονη;
Λύση. Έχουμε:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sin n$	0.841	0.454	0.047	−0.189	−0.191	−0.04 6	−0.09 3	0.123

Άρα η ακολουθία δεν είναι μονότονη.

10.2.7. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ μονότονη;
Λύση. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_{n+1} - f_n &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Θα εξετασουμε την ανισοτητα $\sqrt{n+2} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$. Εχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} &\Leftrightarrow \\ \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)^2 < 4(n+1) &\Leftrightarrow \\ n+2+n+2\sqrt{n+2}\sqrt{n} < 4(n+1) &\Leftrightarrow \\ \sqrt{n+2}\sqrt{n} < n+1 &\Leftrightarrow \\ (n+2)n < (n+1)^2 &\Leftrightarrow 0 < 1. \end{aligned}$$

Άρα για καθε n εχουμε $f_{n+1} < f_n$ και η ακολουθία ειναι γνησιως φθινουσα.

10.2.8. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{2^n}{n!}$ μονότονη;
Λύση. Έχουμε:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq 1.$$

Άρα η ακολουθία ειναι φθινουσα.

10.2.9. Αποδειξε ότι η ακολουθία με $f_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ είναι γνησίως αύξουσα.
Λύση. Εξετάζουμε την διαφορά

$$\begin{aligned} f_n - f_{n+1} &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{4n^2+6n+2}. \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $4n^2+6n+2$ έχει τις ρίζες $-\frac{1}{2}, -1$. Άρα, στο διάστημα $(-1, \infty)$ έχει σταθερό πρόσημο, το ίδιο με αυτό του δευτεροβάθμιου όρου $4n^2$, δηλαδή θετικό. Με άλλα λόγια,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n - f_{n+1} = 4n^2 + 6n + 2 > 0$$

δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

10.2.10. (**Ανισοτητα Bernoulli**) Δίνονται οι ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (1+a)^n$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = 1 + na$, οπου $a \neq 0$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n \geq g_n$, και για κάθε $n > 1$, ισχύει $f_n > g_n$.
Λύση. Για $n = 1$ ισχύει

$$f_1 = (1+a)^1 = 1 + 1 \cdot a = g_1.$$

Για $n = 2$ ισχύει

$$f_2 = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a = g_2.$$

Έστω ότι $(1+a)^k > 1 + ka$. Τώρα

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= (1+a)^{k+1} = (1+a)^k (1+a) > (1+ka)(1+a) \\ &= 1 + (k+1)a + a^2 > 1 + (k+1)a = g_{k+1}. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει το ζητούμενο.

10.2.11. Δειξε με ένα αριθμητικό επιχείρημα ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
Λύση. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε ζεύγη τιμών $\left(n, \frac{1}{n+1}\right)$. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο γίνεται το n, τόσο εγγύτερα βρίσκεται το $\frac{1}{n+1}$ στο 0. Δηλ. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+} = 0$. $\frac{1}{1001.} = 9.99 \times 10^{-4}$

n	1	10	100	1000
$\frac{1}{n+1}$	0.50000000	0.09090909	0.00990099	0.00099900

Η ομοιότητα του πίνακα με αυτόν του Προβλήματος **;;** είναι προφανής και δείχνει ότι η σύγκλιση συναρτήσεων $f(x)$ και αυτή ακολουθιών f_n ουσιαστικά περιγράφουν την ιδια διαδικασία.

10.2.12. Αποδειξε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
Λυση. Εστω τυχον $\varepsilon > 0$. Λαμβανω $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ οποτε $\varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon+1} > \frac{1}{n+1}$ για καθε $n \geq n_\varepsilon$. Οποτε

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \varepsilon > \frac{1}{n+1} = \left|\frac{1}{n+1}\right| > |f_n - 0|.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

10.2.13. Αποδειξε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)=1$.

Λυση. Εστω τυχον $\varepsilon > 0$. Λαμβανω $n_\varepsilon > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ οποτε $\varepsilon > \left(\frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 > \left(\frac{1}{n}\right)^2$ για καθε $n \geq n_\varepsilon$. Οποτε

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \varepsilon > \frac{1}{n^2} = \left|\frac{1}{n^2}+1-1\right| > |f_n - 1|.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$.

10.2.14. Αποδειξε οτι: αν το όριο μιας ακολουθίας υπάρχει, είναι μοναδικό.

Λυση. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi_2 \in \mathbb{R}$.Επιλεγουμε τυχον $\varepsilon > 0$ και εχουμε n_1 και n_2 τετοια ωστε

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow |f_n - \phi_1| < \varepsilon, \\ n \geq n_2 &\Rightarrow |f_n - \phi_2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Αν τωρα θεσουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$, εχουμε

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow |f_n - \phi_1| < \varepsilon, \\ n \geq n_0 &\Rightarrow |f_n - \phi_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

και, προσθετοντας κατα μελη, παιρνουμε

$$2\varepsilon > |f_n - \phi_1| + |f_n - \phi_2| \geq |f_n - \phi_1 + \phi_2 - f_n| = |\phi_1 - \phi_2|.$$

Αφου

$$\forall \varepsilon > 0 : |\phi_1 - \phi_2| < 2\varepsilon$$

συμπεραινουμε οτι $\phi_1 = \phi_2$. Δηλαδη, αν η (f_n) συγκλινει σε δυο παργματικους αριθμους, αυτοι ειναι ισοι. Με αναλογο τροπο μπορουμε να αποδειξουμε οτι η (f_n) δεν μπορει ταυτοχρονως να συγκλινει στο $-\infty$ *και* στο $+\infty$ κτλ.

10.2.15. Υπαρχει το οριο της ακολουθιας $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}$;

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+2)} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} f_n \Rightarrow \\ \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} < 1 \end{aligned}$$

οποτε η (f_n) ειναι γνησιως φθινουσα. Τοτε

$$\forall n : 0 < f_n < \frac{1}{2}$$

(γιατι;). Αρα η (f_n) ειναι μονοτονη και φραγμενη, οποτε υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

10.2.16. Υπαρχει το οριο της ακολουθιας $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$;
Λυση. Εχουμε

$$\forall n : 0 < f_n < \frac{n+1}{n^2} < 2.$$

Επισης εχουμε

$$\begin{aligned} f_{n+1} - f_n &= \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &< \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2n^2} < 0. \end{aligned}$$

οποτε η (f_n) ειναι γνησιως φθινουσα. Αρα η (f_n) ειναι μονοτονη και φραγμενη, οποτε υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

10.2.17. Αποδειξε: αν $\phi, k \in \mathbb{R}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$, τοτε $\lim_{n\to\infty} (kf_n) = k\phi$.
Λύση. Εστω $k \neq 0$. Λαμβανουμε τυχον $\varepsilon > 0$. Υπαρχει n_ε τετοιο ωστε

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow k\,|f_n - \phi| < k\frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow |kf_n - k\phi| < \varepsilon$$

Οποτε $\lim_{n\to\infty} (kf_n) = k\phi$. Αν $k = 0$, τοτε για καθε n εχουμε $kf_n = 0$ και προφανως $\lim_{n\to\infty} (kf_n) = 0 = k\phi$.

10.2.18. Αποδειξε: αν $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} g_n = \gamma \in \mathbb{R}$, τοτε $\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) = \phi + \gamma$.
Λύση. Λαμβανουμε τυχον $\varepsilon > 0$. Υπαρχουν n_1, n_2 τετοια ωστε

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ n \geq n_2 &\Rightarrow |g_n - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Θετουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Τοτε

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ n \geq n_0 &\Rightarrow |g_n - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

και

$$n \geq n_0 \Rightarrow \varepsilon > |f_n - \phi| + |g_n - \gamma| = |f_n - \phi + g_n - \gamma| = |(f_n + g_n) - (\phi + \gamma)|.$$

Οποτε $\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) = \phi + \gamma$.

10.2.19. Αποδειξε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ οταν $|a| < 1$.
Λυση. Εστω τυχον $\varepsilon > 0$. Επειδη μας ενδιαφερουν μικρα ε και $|a| < 1$, αρκει να θεωρησουμε $\varepsilon \in (|a|, 1)$. Τωρα λαμβανω $n_\varepsilon > \log_{|a|} \varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|} > 0$ (σημειωστε οτι $\ln \varepsilon < 0$, $\ln|a| < 0$). Εχω

$$n_\varepsilon > \log_{|a|} \varepsilon \Leftrightarrow n_\varepsilon \cdot \ln|a| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow |a|^n < \varepsilon \Leftrightarrow |a^n - 0| < \varepsilon$$

και αρα για καθε $n \geq n_\varepsilon$ εχω $\varepsilon > |a^{n_\varepsilon} - 0| > |a^n - 0|$, δηλ. $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

10.2.20. Αποδειξε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$.
Λυση. Παρατηρούμε ότι $0 \leq \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \leq \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

10.2.21. Αποδειξε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.
Λυση. Έχουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : -\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

οπότε

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0.$$

10.2.22. Αποδειξε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}$.
Λυση. Είναι

$$\frac{n^3-1}{n^2-1} = \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = n\frac{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\left(\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \infty\cdot 1 = \infty.$$

10.2.23. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

10.2.24. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

10.2.25. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1.$$

10.2.26. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$0 < \left|\frac{\sin(n)}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2+1}.$$

Αν λοιπου υπαρχει το $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n^2+1}$, τοτε θα εχουμε

$$0 = \lim_{n\to\infty}0 < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(n)}{n^2+1}\right| < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(n)}{n^2+1}\right| = 0.$$

Ομως για μια πληρη λυση του προβληματος θα πρεπει να αποδειξουμε και οτι το οριο υπαρχει.

10.2.27. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
Λυση. Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=0.$$

10.2.28. Ασκηση: Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n=\phi$, $\lim_{n\to\infty} g_n=\gamma$ και για καθε n ισχυει $f_n\le h_n\le g_n$. Τοτε, αν υπαρχει το $\eta=\lim_{n\to\infty} h_n$, ισχυει $\phi\le\eta\le\gamma$.
Λύση. Πρεπει

10.2.29. Ασκηση: Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n=\phi=\lim_{n\to\infty} g_n$ και για καθε n ισχυει $f_n\le h_n\le g_n$. Τοτε υπαρχει το $\eta=\lim_{n\to\infty} h_n$ και ισχυει $\phi=\eta$.παρχει το $\eta=\lim_{n\to\infty} h_n$ και $\phi=\eta$.
Λύση. Πρεπει

10.2.30. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} f_n$ αν είναι γνωστό ότι για κάθε n ισχύει $\frac{n}{n+1}<f_n<\frac{n+1}{n+2}$.
Λυση. Έχουμε

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\le\lim_{n\to\infty} f_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$$

οπότε $\lim_{n\to\infty} f_n=1$.

10.2.31. Αποδειξε ότι η ακολουθία με $f_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα.
Λύση. Έχουμε

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε την Ανισοτητα *Bernoulli* με $a=-\frac{1}{(n+1)^2}$ έχουμε

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)=1.$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $\frac{f_{n+1}}{f_n}>1$, δηλαδή η ακολουθία γνησίως αύξουσα.

10.2.32. Αποδειξε ότι η ακολουθία με $g_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Λύση. Αυτό αποδεικνύεται παρόμοια με το προηγούμενο πρόβλημα.

10.2.33. Αποδειξε ότι οι ακολουθίες με $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και $g_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ έχουν κοινό όριο.
Λύση. Θα δείξουμε πρώτα ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_n < g_n$. Πράγματι

$$f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = g_n.$$

Συνδυάζοντας με την μονοτονία που αποδείξαμε στα δύο προηγούμενα προβλήματα, έχουμε

$$2 = f_1 < f_2 < f_3 < .... < g_3 < g_2 < g_1 = 4.$$

Άρα η f_n είναι φραγμένη και γνησίως άυξουσα, άρα έχει ένα όριο, έστω ϕ. Αντίστοιχα, η g_n είναι φραγμένη και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει ένα όριο, έστω γ. Όμως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{f_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} g_n}{\lim_{n\to\infty} f_n} = \frac{\gamma}{\phi}.$$

Οπότε $\frac{\gamma}{\phi} = 1$ δηλ. $\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \phi$. Επισης $2 < \phi < 4$ (γιατι;).

10.2.34. Παρατηρηση: Στην πραγματικότητα γνωρίζαμε ήδη ότι υπάρχει το $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, διότι στο Κεφάλαιο 3έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Άρα και

$$\phi = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Όμως τα παραπάνω προβλήματα μας έχουν δώσει μια καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων του αριθμού $e = 2.718...$.

10.3 Αλυτα Προβληματα

10.3.1. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{3n+4}{n^3}$ είναι φραγμένη.

10.3.2. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{n^2+5}{3n}$ δεν είναι φραγμένη.

10.3.3. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-2)^n$ δεν είναι φραγμένη.

10.3.4. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ φραγμενη;

1. Οταν $f_n = \frac{4n+5}{6n}$ φραγμένη; *Απ.* Ναι.
2. Οταν $f_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ φραγμένη; *Απ.* Ναι.
3. Οταν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{n}{3^n}$ φραγμένη; *Απ.* Ναι.
4. Οταν $f_n = \frac{n!}{n^n}$ φραγμένη; *Απ.* Ναι.

10.3.5. Είναι η ακολουθία με $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$ φραγμένη; Μονότονη;

Απ. Είναι φραγμένη αλλά όχι μονότονη.

10.3.6. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μονότονη;

1. Οταν $f_n = \frac{n}{n+1}$ *Απ.* Ναι.
2. Οταν $f_n = \frac{n+2}{n^3+5}$ μονότονη; *Απ.* Ναι.
3. Οταν $f_n = \frac{1-\cos(n)}{n}$ μονότονη; *Απ.* Όχι.
4. Οταν $f_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ μονότονη; *Απ.* Όχι.

10.3.7. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

10.3.8. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ είναι γνησίως αύξουσα.

10.3.9. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα.

10.3.10. Να μελετηθει ως προς την μονοτονια η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

1. Οταν $f_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
2. Οταν $f_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$.
3. Οταν $f_n = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}$.
4. Οταν $f_n = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1} (n+2)^{-n}$.
5. Οταν $f_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
6. Οταν $f_n = \sqrt[n]{n}$.
7. Οταν $f_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n}}$.

10.3.11. Δείξε με ένα αριθμητικό επιχείρημα ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

10.3.12. Αποδειξε με χρηση του ορισμου οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

10.3.13. Αποδειξε με χρήση του ορισμού ότι:

1. $\lim_{n\to} \frac{2}{n^3} + 1 = 2$.
2. $\lim_{n\to} \frac{2}{n+1} + 1 = 2$.
3. $\lim_{n\to} n^4 = \infty$.
4. Η $f_n = (-2)^n$ δεν έχει όριο.
5. $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ οταν $a > 1$.

10.3.14. Υπολογισε το όριο.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+12n}{(n+2)^3}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4-1}{n^2-1}$.

10.3.15. Αποδειξε ότι οι ακολουθίες με $f_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$ και $g_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n+1}$ έχουν κοινό όριο.

10.3.16. Υπολογισε το οριο.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n}{n^5+6n^2}$. *Απ.* 0.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+1}$. *Απ.* 2.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+6^n}$. *Απ.* 0.
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1}$. *Απ.* 0.
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{5n^2+\sin n}$. *Απ.* 1/5.
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n+\sin n}{n^2+1}$. *Απ.* 0.
7. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. *Απ.* 0.
8. $\lim_{n\to\infty} 3^{-n}$. *Απ.* 0.
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$. *Απ.* 0.
10. $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n^n}$. *Απ.* 0.

10.3.17. Υπολογισε το οριο.

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. *Απ.* 0.
2. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$. *Απ.* 0.
3. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$. *Απ.* 0.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n}-n\right)$.
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$.
6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$. *Απ.* $\frac{3}{2}$.
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n}}$. *Απ.* 0.
8. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$. *Απ.* e^5.

9. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{n+2}$. *Απ.* e^2.

10. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{n+2}$. *Απ.* 0

11. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$. *Απ.* e^4.

10.3.18. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\left(1+e^{-n}\right)^{e^n}$. *Απ.* e

10.3.19. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} f_n$ αν είναι γνωστό ότι για κάθε n ισχύει $\frac{n^2}{n^4+2} < f_n < \frac{n^2}{n^3+2}$. *Απ.* 0.

10.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

10.4.1. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{(2^n-1)n}$ φραγμένη;

10.4.2. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$ φραγμένη;

10.4.3. Είναι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}$ φραγμένη; Μονοτονη;

10.4.4. Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{r^n}{1+r^{2n}}$. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$ για διαφορες τιμες του r.

10.4.5. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$ οταν:

1. $f_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+n+n^2+n^3}$.
2. $f_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n(1+2+\dots+n)}$.
3. $f_n = \frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.
4. $f_n = \frac{1\cdot2+2\cdot3+\dots+n(n+1)}{n^2}$.
5. $f_n = \left(1+\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{2}{5}\right)\dots\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)$.
6. $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n^{2^{n-1}}}\right)$.
7. $f_n = \frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}$.
8. $f_n = \sqrt[n]{3^n+2^{-n}}$.
9. $f_n = \sqrt[n]{2^{n^2}-1}$.
10. $f_n = \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}$.

10.4.6. Εστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθια με θετικους ορους και $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\dots+a_n^n}$. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

10.4.7. Εστω ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} g_n$. Βρες το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n^2 + g_n^2}{f_n + g_n}.$$

10.4.8. Εστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθια τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ και $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt[n]{a_n}$. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

10.4.9. Αποδειξε ότι καθε φραγμένη και μονοτονη ακολουθία συγκλίνει.

10.4.10. Αποδειξε ότι κάθε φραγμενη ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία.

10.4.11. Αποδειξε ότι: για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

10.4.12. Αποδειξε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ανν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$.

10.4.13. Για ποιες τιμές του a είναι η ακολουθία με $f_n = \sin(an)$ συγκλίνουσα;

10.4.14. Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$. Αποδειξε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_N}{N} = \phi,$$
$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{f_1 f_2 \ldots f_N} = \phi.$$

10.4.15. Αποδειξε οτι

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

10.4.16 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοιες ώστε

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n + g_n\sqrt{2} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^n.$$

Αποδειξε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = \sqrt{2}$.

10.4.17 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικούς όρους, η οποία ικανοποιεί

$$\forall n \in \mathbb{N} : (f_n)^2 \leq f_n - f_{n+1}.$$

Αποδειξε ότι $\forall n \in \mathbb{N} : f_n < \frac{1}{n}$.

10.4.18 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

10.4.19 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοια ωστε

$$\forall m, n : f_{m+n} \leq f_m + f_n.$$

Αποδειξε οτι υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n}$.

10.4.20 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{1}}}}$ (με n ριζες). Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

10.4.21 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}$;

10.4.22 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \rho > 0$; Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}$.

10.4.23 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω $p \neq 1$. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}$ για διαφορες τιμες του p.

Κεφάλαιο 11

Αναδρομικες Ακολουθιες

Μια *αναδρομικη ακολουθια* οριζεται δινοντας εναν πεπερασμενο αριθμο *αρχικων ορων* και μια σχεση με την οποια υπολογιζονται αναδρομικα οι υπολοιποι οροι αυτης.

11.1 Θεωρια και Παραδειγματα

11.1.1. Συμβολισμος: Σε αυτο το κεφαλαιο θα δουλεψουμε με ακολουθιες της μορφης

$$(f_0, f_1, f_2, \dots) = (f_n)_{n=0}^{\infty}$$

δηλ. αρχιζουμε την αριθμηση των ορων της ακολουθιας απο τον *μηδενικο ορο*. Ολη η ορολογια και τα αποτελεσματα του Κεφαλαιου 10 μπορουν να προσαρμοστουν στον νεο συμβολισμο.

11.1.2. Ορισμος: Μια σχεση (μεταξυ ορων τυχουσης ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$) της μορφης

$$\forall n \in \{1, 2, 3, \dots\} : f_n = A(f_{n-1})$$

λέγεται *εξίσωση διαφορών πρωτης ταξης*. Γενικοτερα, μια σχεση της μορφης

$$\forall n \in \{K, K+1, K+2, \dots\} : f_n = A(f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-K})$$

λέγεται *εξίσωση διαφορών K ταξης*.

11.1.3. Παραδειγμα: Μια εξισωση διαφορων ειναι η

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} : f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n + 2.$$

Ποια ειναι η ταξη της;

11.1.4. Ορισμος: Μια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ λέγεται *αναδρομική ακολουθία* ανν ορίζεται ως εξής: δινονται οι *αρχικες συνθηκες* $f_0 = c_1$, $f_1 = c_2$, ..., $f_{K-1} = c_K$ και επίσης μία εξισωση διαφορων $f_n = A(f_{n-1}, \dots, f_{n-K})$.

11.1.5. Ορισμος: Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποία ικανοποιει την εξισωση διαφορων της μορφης

$$n \in \{K, K+1, K+2, \dots\} : f_n = A(f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-K}). \tag{11.1}$$

Τοτε η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ λεγεται *λυση* της (11.1).

11.1.6. Παρατηρηση: Καθε λυση μιας εξισωσης διαφορων ειναι αναδρομικη ακολουθια με καταλληλες αρχικες συνθηκες (γιατι;).

11.1.7. Ασκηση: Δωσε ένα παράδειγμα αναδρομικής ακολουθίας.
Λύση. Μια αναδρομικη ακολουθια ειναι αυτη που οριζεται ως εξης:

$$f_0 = 5, \qquad \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n + 2. \tag{11.2}$$

Η *μοναδικη* λυση της (11.2) ειναι η

$$f_n = \frac{1}{2^n} + 4.$$

11.1.8. Παρατηρηση: Είναι φανερό ότι υπάρχει μια μοναδική ακολουθία η οποία ικανοποιεί δεδομένες αρχικες συνθηκες και δεδομένη εξίσωση διαφορών (γιατί;).

11.1.9. Ορισμος: Μια εξισωση διαφορων της μορφης

$$\forall n \geq K : f_n + a_1 f_{n-1} + ... + a_K f_{n-K} = 0$$

λέγεται *ομογενης γραμμικη εξισωση διαφορων K ταξης με σταθερους συντελεστες*. Παρομοια, μια εξισωση διαφορων της μορφης

$$\forall n \geq K : f_n + a_1 f_{n-1} + ... + a_K f_{n-K} = F(n)$$

λέγεται *μη ομογενης γραμμικη εξισωση διαφορων K ταξης με σταθερους συντελεστες*.

11.1.10. Παραδειγμα: Μια ομογενης εξισωση διαφορων 2ης ταξης ειναι η

$$\forall n \geq 2 : f_n + \frac{5}{6} f_{n-1} + \frac{1}{6} f_{n-2} = 0.$$

Τρεις λυσεις αυτης ειναι οι $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ οι οποιες εχουν τους εξης γενικους ορους

$$\forall n \geq 2 : p_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad q_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \qquad g_n = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

οι c_1, c_2 ειναι αυθαιρετες σταθερες.

11.1.11. Παρατηρηση: Μια εξισωση διαφορων της μορφης

$$n \in \{K, K+1, K+2, ...\} : f_n = A(f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-K}) \tag{11.3}$$

θα εχει γενικα περισσοτερες της μιας λυσης. Αλλα μια εξισωση διαφορων *με αρχικες συνθηκες* της μορφης

$$f_0 = c_1, \qquad f_1 = c_2, ..., f_{K-1} = c_K, \tag{11.4}$$
$$n \in \{K, K+1, K+2, ...\} : f_n = A(f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-K}) \tag{11.5}$$

θα εχει *ακριβως μια λυση* (γιατι;).

11.1.12. Παραδειγμα: Μια μη ομογενης εξισωση διαφορων 2ης ταξης με αρχικες συνθηκες ειναι η

$$
\begin{aligned}
&f_0 = 1,\\
&f_1 = 1,\\
&\forall n \geq 2 : f_n + \frac{5}{6} f_{n-1} + \frac{1}{6} f_{n-2} = 1.
\end{aligned}
$$

Η μοναδικη λυση αυτης (ελεγξε το!) ειναι η

$$\forall n \geq 1 : f_n = \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}.$$

11.1.13. Παρατηρηση: Τα επομενα θεωρηματα δινουν την μεθοδολογια υπολογισμου αναδρομικων ακολουθιων που οριζονται απο εξισωσεις διαφορων καποιων ειδικων τυπων.

11.1.14. Θεωρημα: Εστω εξισωση διαφορων της μορφης

$$\forall n \geq 1 : f_n + a_1 f_{n-1} = b. \tag{11.6}$$

Τοτε οι λυσεις της (11.6) εχουν την μορφη

$$
\begin{aligned}
f_n &= c\,(-a_1)^n + b\left(1 + (-a_1) + (-a_1)^2 + \ldots + (-a_1)^{n-1}\right) &(11.7)\\
&= c\,(-a_1)^n + b\frac{1-(-a_1)^n}{1+a_1}. &(11.8)
\end{aligned}
$$

Η c ειναι αυθαιρετη σταθερα.
Αποδειξη. Ξαναγραφουμε την (11.6) στην μορφη

$$f_n = -a_1 f_{n-1} + b. \tag{11.9}$$

Ας υποθεσουμε οτι $f_0 = c$. Απο την (11.9) παιρνουμε

$$
\begin{aligned}
f_0 &= c\\
f_1 &= -ca_1 + b\\
f_2 &= -a_1\,(-ca_1 + b) + b = ca_1^2 - ba_1 + b = ca_1^2 + b\,(1 - a_1)\\
f_3 &= -a_1\left(ca_1^2 - ba_1 + b\right) + b = -ca_1^3 + b\left(1 - a_1 + a_1^2\right)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

τα οποια συμφωνουν με την (11.7). Για να *αποδειξουμε* την (11.7) δουλευουμε επαγωγικα. Οντως αυτη ισχυει για $n = 1$· εστω οτι ισχυει για $n \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Τοτε

$$
\begin{aligned}
f_{k+1} &= -a_1 f_k + b\\
&= -a_1\left(c\,(-a_1)^k + b\left(1 - a_1 + a_1^2 - \ldots + (-1)^{k-1}\,a_1^{k-1}\right)\right) + b\\
&= c\,(-a_1)^{k+1} - a_1 b\left(1 - a_1 + a_1^2 - \ldots + (-1)^{k-1}\,a_1^{k-1}\right) + b\\
&= (-a_1)^{k+1}\,c + b\left(1 - a_1 + a_1^2 - \ldots. + (-1)^k\,a_1^k\right)
\end{aligned}
$$

και εχουμε αποδειξει την (11.7) απο την οποια προκυπτει αμεσα και η (11.8).

11.1.15. Ασκηση: Βρες τον n-στο όρο της ακολουθίας με $f_0 = 6$ και $f_{n+1} - \frac{1}{3}f_n = 0$.
Λύση. Απο την (11.7) εχουμε τον γενικο τυπο της λυσης

$$\forall n \geq 1 : f_n = c\left(\frac{1}{3}\right)^n + 0.$$

Για να ισχυει ο τυπος και για $n = 0$ πρεπει να εχουμε

$$6 = f_0 = c\left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow c = 6.$$

Οποτε ο n-στος ορος της ακολουθιας ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

11.1.16. Ασκηση: Βρες τον n-στο όρο της ακολουθίας με $f_0 = 6$ και $f_{n+1} - \frac{1}{3}f_n = 2$.
Λύση. Απο την (11.7) εχουμε τον γενικο τυπο της λυσης

$$\forall n \geq 1 : f_n = c\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\forall n \geq 1 : f_n = c\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = c\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Για να ισχυει ο τυπος και για $n = 0$ πρεπει να εχουμε

$$6 = f_0 = c\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) \Rightarrow 6 = c.$$

Οποτε ο n-στος ορος της ακολουθιας ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3.$$

11.1.17. Θεωρημα: Εστω εξισωση διαφορων της μορφης

$$n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0 \tag{11.10}$$

και r_1, r_2 οι ριζες της *χαρακτηριστικης εξισωσης*

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0. \tag{11.11}$$

Εαν $r_1 \neq r_2$, *ολες* οι λυσεις της (11.10) εχουν την *γενικη* μορφη

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

ενω αν $r_1 = r_2$, *ολες* οι λυσεις της (11.10) εχουν την *γενικη* μορφη

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_1^n.$$

Οι c_1, c_2 ειναι αυθαιρετες σταθερες.

Αποδειξη. Καταρχην θα αποδειξουμε οτι καθε ακολουθια με $f_n = r_i^n$ (με $i \in \{1, 2\}$) ειναι λυση της (11.10). Πραγματι εχουμε

$$r_i^n + a_1 r_i^{n-1} + a_2 r_i^{n-2} = r_i^{n-2}\left(r_i^2 + a_1 r_i + a_2\right) = 0$$

αφου η r_i ειναι ριζα της (11.11). Τωρα θα δειξουμε οτι, οταν $r_1 = r_2$, και καθε ακολουθια με $f_n = n r_1^n$ ειναι επισης λυση της (11.10). Πραγματι εχουμε

$$\begin{aligned} & n r_1^n + a_1 (n-1) r_1^{n-1} + a_2 (n-2) r_1^{n-2} \\ & = n r_1^{n-2}\left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2\right) - r_1^{n-2} (a_1 r_1 + 2a_2) = 0. \end{aligned}$$

Εδω εκμεταλλευτηκαμε το γεγονος οτι το $r_1 = r_2$ συνεπαγεται

$$a_1^2 - 4a_2 = 0, \qquad r_1 = r_2 = -\frac{a_1}{2}$$

οποτε

$$a_1 r_1 + 2a_2 = -a_1 \frac{a_1}{2} + 2a_2 = -\frac{a_1^2 - 4a_2}{2} = 0.$$

Τωρα θα δειξουμε το εξησ: αν $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ και $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι δυο λυσεις της (11.10), τοτε και η $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ που δινεται απο την σχεση

$$g_n = c_1 p_n + c_2 q_n$$

(με c_1, c_2 αυθαιρετες σταθερες) ειναι επισης λυση της (11.10). Πραγματι, εχουμε

$$\forall n \geq 2 : p_n + a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-2} = 0 \tag{11.12}$$
$$\forall n \geq 2 : q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} = 0 \tag{11.13}$$

Πολλαπλασιαζοντας την (11.12) με αυθαιρετη σταθερα c_1, την (11.13) με αυθαιρετη σταθερα c_2 και προσθετοντας κατα μελη, παιρνουμε:

$$\begin{aligned} & \forall n \geq 2 : c_1 (p_n + a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-2}) + c_2 (q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2}) = 0 \Rightarrow \\ & \forall n \geq 2 : (c_1 p_n + c_2 q_n) + a_1 (c_1 p_{n-1} + c_2 q_{n-1}) + a_2 (c_1 p_{n-2} + c_2 q_{n-2}) = 0 \end{aligned}$$

το οποιο δειχνει οτι η $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι λυση της (11.10).

11.1.18. Ασκηση: Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 3, \tag{11.14}$$
$$f_1 = 2, \tag{11.15}$$
$$\forall n \geq 2 : f_n + \frac{4}{3} f_{n-1} + \frac{1}{3} f_{n-2} = 0. \tag{11.16}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση της (11.46) ειναι

$$x^2 + \frac{4}{3} x + \frac{1}{3} = 0$$

με ριζες $r_1 = -\frac{1}{3}$, $r_2 = -1$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2 (-1)^n . \tag{11.17}$$

Για να ικανοποιειται η (11.47) και για $n \in \{0, 1\}$ πρεπει να εχουμε

$$3 = f_0 = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2 (-1)^0 = c_1 + c_2,$$
$$2 = f_1 = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2 (-1)^1 = -\frac{c_1}{3} - c_2.$$

Λυνοντας το συστημα

$$c_1 + c_2 = 3$$
$$\frac{c_1}{3} + c_2 = -2$$

παιρνουμε τις λυσεις $c_1 = \frac{15}{2}$, $c_2 = -\frac{9}{2}$ οποτε η λυση των (11.44)-(11.46) ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{15}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{2}(-1)^n .$$

11.1.19. Ασκηση: Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 2, \tag{11.18}$$
$$f_1 = 1, \tag{11.19}$$
$$\forall n \geq 2 : f_n + f_{n-1} + \frac{1}{4} f_{n-2} = 0. \tag{11.20}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση της (11.20) ειναι

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

με ριζες $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(-\frac{1}{2}\right)^n . \tag{11.21}$$

Για να ικανοποιειται η (11.47) και για $n \in \{0, 1\}$ πρεπει να εχουμε

$$2 = f_0 = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 0 \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = c_1,$$
$$1 = f_1 = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 1 \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}.$$

Λυνοντας το συστημα

$$c_1 = 2$$
$$\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} = -1$$

παιρνουμε τις λυσεις $c_1 = 2$, $c_2 = -4$ οποτε η λυση των (11.18)-(11.20) ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 4n\left(-\frac{1}{2}\right)^n .$$

11.1.20. Ασκηση: Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \tag{11.22}$$
$$f_1 = 2, \tag{11.23}$$
$$\forall n \geq 2 : f_n + f_{n-2} = 0. \tag{11.24}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση της (11.50) ειναι

$$x^2 + 1 = 0$$

με φανταστικες ριζες $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : c_1 i^n + c_2 (-i)^n . \tag{11.25}$$

Για να ικανοποιειται η (11.51) και για $n \in \{0, 1\}$ πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} 1 = f_0 = c_1 i^0 + c_2 (-i)^0 = c_1 + c_2, \\ 2 = f_1 = c_1 i^1 + c_2 (-i)^1 = c_1 i - c_2 i. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 = 1 \\ ic_1 - ic_2 = 2 \end{aligned}$$

παιρνουμε τις λυσεις $c_1 = \frac{1}{2} - i$, $c_2 = \frac{1}{2} + i$ οποτε η λυση των (11.44)-(11.46) ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = \left(\frac{1}{2} - i\right) i^n + \left(\frac{1}{2} + i\right) (-i)^n .$$

Τιθεται το ερωτημα: πως ειναι δυνατον να εχουμε *μιγαδικο* ορο f_n σε μια ακολουθια που οριστηκε μονο με τις πραγματικες εξισωσεις (11.48)-(11.50). Η απαντηση ειναι η εξησ: επειδη $\overline{\left(\frac{1}{2} - i\right) i^n} = \left(\frac{1}{2} + i\right) (-i)^n$, η λυση μπορει να γραφτει

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 : f_n = \left(\frac{1}{2} - i\right) i^n + \overline{\left(\frac{1}{2} - i\right) i^n} \Rightarrow \\ \forall n \geq 0 : f_n = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{2} - i\right) i^n\right) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

11.1.21. Ασκηση: Βρες τον n-στο όρο και το όριο της *ακολουθίας Fibonacci*, η οποία ορίζεται με

$$\begin{aligned} f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \\ \forall n \geq 2 : f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \end{aligned}$$

Λύση. Σε αυτή την περίπτωση η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$x^2 = x + 1$$

και έχει ρίζες $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Οπότε ο τύπος του n-στού όρου θα έχει την μορφή

$$f_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{11.26}$$

και για να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 &= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Η λύση του συστηματος είναι $A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Οπότεο τύπος του n-στού όρου θα έχει την μορφή

$$f_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{11.27}$$

Ο αναδρομικός τύπος (11.27) δίνει

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, ...) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) \tag{11.28}$$

και μπορουμε να ελεγξουμε την ορθοτητα αυτων των ορων εκτελωντας τους υπολογισμους

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= f_0 + f_1 = 2 \\ f_3 &= f_1 + f_2 = 3 \\ f_4 &= f_2 + f_3 = 5 \\ f_5 &= f_3 + f_4 = 8 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Αυτή είναι η περίφημη ακολουθία *Fibonacci*, η οποία έχει πολλές αξιοσημείωτες ιδιότητες.

11.1.22. Συμβολισμος: Παρακατω θα χρησιμοποιουμε τους συμβολισμους $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$ και $\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618....$

11.1.23. Ασκηση: Αν $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι η ακολουθια *Fibonacci*, αποδειξε οτι, για καθε $n \geq 0$, ισχυει

$$f_0 + f_1 + ... + f_{n-1} = f_{n+1} - 1. \tag{11.29}$$

Λύση. Θα αποδειξουμε την (11.29) επαγωγικα. Για $n = 0$ εχουμε

$$f_0 = f_2 - 1 \Leftrightarrow f_0 + 1 = f_2 \Leftrightarrow f_0 + f_1 = f_2$$

αρα η (11.29) ισχυει. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Τοτε εχουμε

$$\begin{gathered} f_0 + f_1 + ... + f_{k-1} = f_{k+1} - 1 \Rightarrow \\ f_0 + f_1 + ... + f_{k-1} + f_k = f_k + f_{k+1} - 1 = f_{k+2} - 1 \end{gathered}$$

και η αποδειξη ειναι πληρης.

11.1.24. Παρατηρηση: Υπαρχουν τυποι εξισωσεων διαφορων για τις οποιες δεν υπαρχει (ή δεν θα παραθεσουμε) τυποποιημενη μεθοδολογια επιλυσης. Για να υπολογισουμε τις λυσεις τετοιων χρησιμοποιουμε διαφορα τεχνασματα. Αξιζει να σημειωθει οτι ακομη και αν δεν μπορουμε να επιλυσουμε μια εξισωση διαφορων, μπορει να ειμαστε σε θεση να προσδιορισουμε διαφορες ιδιοτητες των λυσεων αυτης. Η σημασια αυτων των παρατηρησεων θα ξεκαθαριστει απο τα επομενα παραδειγματα.

11.1.25. Ασκηση: Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \qquad f_2 = 2,$$
$$\forall n \geq 3 : f_n - 6f_{n-1} + 11f_{n-2} - 6f_{n-3} = 0.$$

Λύση. Η μεθοδολογια επιλυσης ειναι παρομοια με αυτη των γραμμικων εξισωσεων δευτερης ταξης. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$. Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$f_n = c_1 1^n + c_2 3^n + c_3 2^n.$$

Θετοντας $n = 0, 1, 2$ παιρνουμε

$$1 = f_0 = c_1 1^0 + c_2 3^n + c_3 2^n,$$
$$1 = f_1 = c_1 1^1 + c_2 3^1 + c_3 2^1,$$
$$2 = f_2 = c_1 1^2 + c_2 3^2 + c_3 2^2.$$

Λυνοντας το συστημα

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$
$$c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 1$$
$$c_1 + 9c_2 + 4c_3 = 2$$

η οποια εχει λυση $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -1$. Οποτε η λυση ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}3^n - 2^n.$$

11.1.26. Ασκηση: Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \tag{11.30}$$
$$\forall n \geq 2 : f_n + 2f_{n-1} - 3f_{n-2} = 2^{n+2}. \tag{11.31}$$

Λύση. Η εξισωση ειναι *μη ομογενης*. Παρολα αυτα αρχιζουμε βρισκοντας την γενικη λυση της αντιστοιχης ομογενους:

$$g_n + 2g_{n-1} - 3g_{n-2} = 2^{n+2}. \tag{11.32}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = 1$, $r_2 = -3$, οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$g_n = c_1 + c_2 (-3)^n .$$

Τωρα υποθετουμε οτι η μη ομογενης εχει *καποια* λυση h_n της μορφης

$$h_n = c_3 2^n.$$

Αν αυτο ισχυει, τοτε εχουμε

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 2 : h_n + 2h_{n-1} - 3h_{n-2} = 2^{n+2} \Rightarrow \\
&\forall n \geq 2 : c_3 2^n + 2c_3 2^{n-1} - 3c_3 2^{n-2} = 2^{n+2} \Rightarrow \\
&\forall n \geq 2 : 2^{n-2} (4c_3 + 4c_3 - 3c_3) = 2^{n+2} \Rightarrow \\
&\forall n \geq 2 : (4c_3 + 4c_3 - 3c_3) = \frac{2^{n+2}}{2^{n-2}} \Rightarrow \\
&5c_3 = 4 \Rightarrow c_3 = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Τωρα, μπορουμε να ελεγξουμε ευκολα, οτι *η γενικη λυση της (11.53) ισουται με την γενικη λυση της (11.54)*. Δηλ. θετοντας

$$g_n + h_n = c_1 + c_2 (-3)^n + \frac{4}{5} 2^n$$

φαινεται ευκολα (*ελεγξε το*) οτι

$$\forall n \geq 2 : (g_n + h_n) + 2 (g_{n-1} + h_{n-1}) - 3 (g_{n-2} + h_{n-}) = 2^{n+2}. \tag{11.33}$$

Θελουμε να ισχυει η (11.33) και για $n \in \{0, 1\}$. Δηλ.

$$\begin{aligned}
1 = g_0 + h_0 = c_1 + c_2 (-3)^0 + \frac{4}{5} 2^0 = c_1 + c_2 + \frac{4}{5}, \\
1 = g_1 + h_1 = c_1 + c_2 (-3)^1 + \frac{4}{5} 2^1 = c_1 - 3c_2 + \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= \frac{1}{5} \\
c_1 - 3c_2 &= -\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

παιρνουμε $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{1}{5}$, οποτε

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{1}{5} (-3)^n + \frac{4}{5} 2^n$$

ειναι η ζητουμενη λυση.

11.1.27. Ασκηση: Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 2, \tag{11.34}$$
$$\forall n \geq 1 : f_{n+1} - f_n + nf_{n+1}f_n = 0. \tag{11.35}$$

Λύση. Η εξισωση ειναι *μη γραμμικη*. Διαιρουμε την (11.34) με $f_{n+1}f_n$ και εχουμε

$$\frac{1}{f_{n+1}} - \frac{1}{f_n} + n = 0. \tag{11.36}$$

Θετουμε $g_n = \frac{1}{f_n}$ και η (11.36) γινεται

$$g_{n+1} - g_n = n.$$

Οποτε

$$\begin{aligned} g_1 - g_0 &= 0 \\ g_2 - g_1 &= 1 \\ &\dots \\ g_n - g_{n-1} &= n - 1. \end{aligned} \tag{11.37}$$

Θετοντας $g_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{2}$ και προσθετοντας την (11.37) εχουμε $\frac{1}{2} + \frac{(n-1)n}{2} =$

$$g_n = \frac{1}{2} + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n^2 - n + 1}{2}.$$

Οποτε

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{2}{n^2 - n + 1}.$$

11.1.28. Ασκηση: Βρες το όριο της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{2}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = c \in (0,1)\,,$$
$$\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{\frac{f_n + 1}{2}}.$$

Λύση. Αν υπήρχε το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$, θα είχαμε $\phi = \sqrt{\frac{\phi+1}{2}}$ και θα έπρεπε να ισχύει $\phi^2 = \frac{\phi+1}{2}$. Αυτή η εξίσωση έχει ρίζες 1 και $-\frac{1}{2}$. Επειδή η ακολουθία μας έχει αυστηρά θετικούς όρους, υποψιαζόμαστε ότι το ζητούμενο όριο είναι το 1. Πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι το όριο όντως υπάρχει και θα επιτύχουμε αυτό αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία είναι φραγμενη και μονότονη. Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n > 0$. Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_{n+1} > f_n$. Αυτό ισχύει για $n = 1$, αφού

$$f_1 = \sqrt{\frac{1+c}{2}} > \frac{1+c}{2} > \frac{c+c}{2} = c = f_0.$$

(Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $b \in (0,1) \Rightarrow b < \sqrt{b}$). Εστω οτι ισχυει για καθε $n \in \{1, 2, \dots, k\}$. Τοτε

$$f_{k+2} = \sqrt{\frac{f_{k+1} + 1}{2}} > \sqrt{\frac{f_k + 1}{2}} = f_{k+1}$$

οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_{n+1} > f_n$. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Μένει να βρούμε ένα άνω φράγμα. Πράγματι

$$f_k < 1 \Rightarrow \frac{f_k + 1}{2} < 1 \Rightarrow f_{k+1} = \sqrt{\frac{f_k + 1}{2}} < \sqrt{1} = 1.$$

Αυτό σε συνδυασμό με το ότι $f_1 = c < 1$ δείχνει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n < 1$. Τελικά λοιπόν η ακολουθία είναι φραγμένη και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει όριο και, όπως είπαμε προηγουμένως, είναι $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$.

11.1.29. Ασκηση: Βρες το όριο της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{2}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 2,$$
$$\forall n \geq 0 : f_{n+1} = 2 - \frac{1}{f_n}.$$

Λύση. Πρώτα θα δείξουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$f_n > 1.$$

Αυτό ισχύει για $n = 1$ και έστω ότι ισχύει για καθε $n \in \{1, 2, ..., k\}$. Τότε

$$f_k > 1 \Rightarrow \frac{1}{f_k} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{f_k} > -1 \Rightarrow f_{k+1} = 2 - \frac{1}{f_k} > 2 - 1 = 1.$$

Τώρα θα δείξουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_n > f_{n+1}$. Έχουμε

$$f_1 = 2 > \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} = f_2,$$

άρα ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι ισχύει για για καθε $n \in \{1, 2, ..., k\}$. Τότε

$$f_{k+1} < f_k \Rightarrow \frac{1}{f_{k+1}} > \frac{1}{f_k} \Rightarrow f_{k+2} = 2 - \frac{1}{f_{k+1}} < 2 - \frac{1}{f_k} = f_{k+1}.$$

Αρα, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως φθινουσα και φραγμενη (γιατι;):

$$\forall n \geq 0 : 1 < f_n < 2.$$

Οποτε η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι και συγκλινουσα. Θετω $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$. Τοτε

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{f_n}\right) \Rightarrow \phi = 2 - \frac{1}{\phi} \Rightarrow \phi^2 = 2\phi - 1.$$

Λυνοντας την εξισωση $\phi^2 = 2\phi - 1$ βλεπουμε οτι εχει μοναδικη ριζα την $\phi = 1$. Αρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$.

11.1.30. Ασκηση: Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = \frac{1}{4},$$
$$\forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1}^2 + \frac{1}{8}.$$

Λύση. Προφανως για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n > 0$. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$f_{n+1} < f_n. \tag{11.38}$$

Εχουμε $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

$$f_1 = \frac{1}{2}f_0^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} < \frac{1}{4} = f_0$$

οποτε η (11.60) ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$f_k < f_{k-1} \Rightarrow \frac{1}{2}f_k^2 + \frac{1}{8} < \frac{1}{2}f_{k-1}^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow f_{k+1} < f_k.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως φθινουσα. Αφου ειναι και θετικη, συμπεραινουμε οτι για καθε $n \geq 0$

$$0 < f_n \leq \frac{1}{4}. \tag{11.39}$$

Αφου η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι φραγμενη και μονοτονη, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι συγκλινουσα. Εστω

$$\phi = \lim_{n\to\infty} f_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]. \tag{11.40}$$

Τοτε

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}f_n^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f_n^2 + \frac{1}{8}\right) \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0.$$

Οι ριζες της $\frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0$

$$\phi_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{4},$$
$$\phi_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} < \frac{1}{4}.$$

Λογω της (11.62) συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

11.2 Λυμενα Προβληματα

11.2.1. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$f_0 = 2, \qquad \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{2}{3}f_n$$

είναι γνησίως φθίνουσα.
Λύση. Προφανώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_{n+1} = \frac{2}{3}f_n < f_n$.

11.2.2. Βρες τον n-στο όρο της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$\begin{aligned} f_0 &= 5, \\ \forall n \geq 0 : f_{n+1} + 2f_n &= 0. \end{aligned}$$

Λύση. Εχουμε

$$\forall n \geq 1 : f_n = c\,(-2)^n .$$

Για $n = 0$ πρεπει να εχουμε

$$5 = f_0 = c\,(-2)^0 \Rightarrow c = 5.$$

Ωστε ο n-στος ορος της ακολουθιας ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 5 \cdot (-2)^n .$$

11.2.3. Βρες τον n-στο όρο της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$\begin{aligned} f_0 &= 6, \\ \forall n \geq 0 : f_{n+1} + f_n &= 2. \end{aligned}$$

Λύση. Απο την (11.7) εχουμε τον γενικο τυπο της λυσης

$$\begin{aligned} &\forall n \geq 1 : f_n = c\,(-1)^n + 2\left(1 - 1 + 1 - ... + (-1)^{n-1}\right) \Rightarrow \\ &\forall n \geq 1 : f_n = c\,(-1)^n + 2\frac{1-(-1)^n}{2} = c\,(-1)^n + (1-(-1)^n) . \end{aligned}$$

Για να ισχυει ο τυπος και για $n = 0$ πρεπει να εχουμε

$$6 = f_0 = c\,(-1)^0 + 3\left(1 - (-1)^0\right) \Rightarrow 6 = c.$$

Οποτε ο n-στος ορος της ακολουθιας ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 5\,(-1)^n + 1.$$

11.2.4. Βρες τον n-στο όρο της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \tag{11.41}$$

$$f_1 = 1, \tag{11.42}$$

$$\forall n \geq 2 : f_{n+2} - \frac{3}{2}f_{n+1} + \frac{1}{2}f_n = 0. \tag{11.43}$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

με ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Ο n-στος ορος ειναι

$$f_n = c_1 1^n + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

και για να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να έχουμε

$$1 = c_1 + c_2$$
$$1 = c_1 + \frac{c_2}{2}$$

οπότε $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ και

$$\forall n \geq 0 : f_n = 1.$$

11.2.5. Βρες τον n-στο όρο της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = -1, \tag{11.44}$$
$$f_1 = 2, \tag{11.45}$$
$$\forall n \geq 2 : f_n + 2f_{n-1} + f_{n-2} = 0. \tag{11.46}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση της (11.46) ειναι

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

με διπλη ριζα $r_1 = r_2 = -1$. Η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : c_1 (-1)^n + c_2 n (-1)^n \tag{11.47}$$

και για $n \in \{0, 1\}$ θελουμε

$$-1 = f_0 = c_1 (-1)^0 + c_2 0 (-1)^0 = c_1,$$
$$2 = f_1 = c_1 (-1)^1 + c_2 (-1)^2 = -c_1 - c_2$$

οποτε $c_1 = -1$, $c_2 = -1$ και

$$\forall n \geq 0 : f_n = -(1+n)(-1)^n.$$

11.2.6. Βρες τον n-στο όρο της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \tag{11.48}$$
$$f_1 = 0, \tag{11.49}$$
$$\forall n \geq 2 : f_n + f_{n-1} + f_{n-2} = 1. \tag{11.50}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση της αντιστοιχης ομογενους

$$g_n + g_{n-1} + g_{n-2} = 0$$

ειναι

$$x^2 + x + 1 = 0$$

με ριζες $r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $r_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ και η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : g_n = c_1 \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n. \tag{11.51}$$

Για την ειδικη λυση της μη ομογενους υποθετουμε $h_n = c_3$ και εχουμε

$$h_n + h_{n-1} + h_{n-2} = 1 \Rightarrow 3c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$$

Οποτε η γενικη λυση της μη ομογενους θα ειναι

$$f_n = g_n + h_n = c_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \frac{1}{3}$$

και οι αρχικες συνθηκες δινουν

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{3} &= 1 \\ c_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^1 + \frac{1}{3} &= 0 \end{aligned}$$

με λυση $c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$, οποτε

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n + 1 \right).$$

11.2.7. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$\begin{aligned} f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 2, \\ \forall n \geq 3 : f_n - 7f_{n-1} + 16f_{n-2} - 12f_{n-3} = 0. \end{aligned}$$

Λύση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$f_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 3^n.$$

Θετοντας $n = 0, 1, 2$ παιρνουμε

$$\begin{aligned} 1 = f_0 &= c_1 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 + c_3 3^0, \\ 1 = f_1 &= c_1 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 + c_3 3^1, \\ 2 = f_2 &= c_1 2^2 + c_2 \cdot 2 \cdot 2^2 + c_3 3^2. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 1 \\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 1 \\ 4c_1 + 8c_2 + 9c_3 &= 2 \end{aligned}$$

η οποια εχει λυση $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, $c_3 = 2$. Οποτε η λυση ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = -2^n - \frac{3}{2} n 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

11.2.8. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0,$$
$$\forall n \geq 3 : f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{7}{12}f_{n-2} + \frac{1}{12}f_{n-3} = 0.$$

Λύση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$, $r_3 = -\frac{1}{3}$. Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$f_n = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n\left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_3\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Θετοντας $n = 0, 1, 2$ παιρνουμε το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{3}c_3 &= 0 \\ \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{9}c_3 &= 0 \end{aligned}$$

με λυση $c_1 = -8$, $c_2 = 2$, $c_3 = 9$. Οποτε η λυση ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 9\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

11.2.9. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \tag{11.52}$$
$$\forall n \geq 2 : f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2} = n. \tag{11.53}$$

Λύση. Η αντιστοιχη ομογενης ειναι

$$g_n - 5g_{n-1} + 6g_{n-2} = 0. \tag{11.54}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

με ριζες $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$g_n = c_1 2^n + c_2 3^n.$$

Τωρα υποθετουμε οτι η μη ομογενης εχει *καποια* λυση h_n της μορφης

$$h_n = c_3 n + c_4.$$

Αν αυτο ισχυει, τοτε εχουμε

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 2 : h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} = n \Rightarrow \\
&\forall n \geq 2 : c_3 n + c_4 - 5\left(c_3\left(n-1\right) + c_4\right) + 6\left(c_3\left(n-2\right) + c_4\right) = n \Rightarrow \\
&\forall n \geq 2 : \left(c_3 - 5c_3 + 6c_3\right) n + \left(c_4 + 5c_3 - 5c_4 - 12c_3 + 6c_4\right) = n
\end{aligned}$$

που δινει το συστημα

$$\begin{aligned}
2c_3 &= 1 \\
-7c_3 + 2c_4 &= 0
\end{aligned}$$

με λυσεις $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{7}{4}$. Οποτε της μη ομογενους ειναι

$$f_n = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{n}{2} + \frac{7}{4}.$$

Χρησιμοπιωντας και τις αρχικες συνθηκες $f_0 = f = 1$ τελικα παιρνουμε

$$\forall n \geq 0 : f_n = -2^n + \frac{1}{4} 3^n + \frac{n}{2} + \frac{7}{4}.$$

11.2.10. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 2, \tag{11.55}$$

$$\forall n \geq 2 : f_{n+2} = \frac{f_{n+1}^3}{f_n^2}. \tag{11.56}$$

Λύση. Η εξισωση ειναι μη γραμμικη. Επειδη $f_0 > 0, f_1 > 0$ ισχυει

$$\forall n \geq 0 : f_n > 0.$$

Λογαριθμιζουμε την (11.56) ως προς 2 και θετουμε $g_n = \log_2 f_n$ οποτε εχουμε

$$\begin{aligned}
&g_0 = 0, \qquad g_1 = 1, \\
&\forall n \geq 2 : g_{n+2} - 3g_{n+1} + 2g_n = 0.
\end{aligned}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $x^2 - 3x + 2 = 0$ με ριζες $r_1 = 2$, $r_2 = 1$. Χρησιμοποιωντας και τις αρχικες συνθηκες παιρνουμε

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 0 : g_n = 2^n - 1 \Rightarrow \\
&\forall n \geq 0 : f_n = 2^{2^n - 1}.
\end{aligned}$$

11.2.11. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$\begin{aligned}
&f_0 = 1, \\
&\forall n \geq 1 : f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Λύση. Προφανως για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n > 0$. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$f_{n+1} > f_n. \tag{11.57}$$

Εχουμε

$$f_1 = \sqrt{1+f_0} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1 = f_0$$

οποτε η (11.57) ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$f_k > f_{k-1} \Rightarrow \sqrt{1+f_k} > \sqrt{1+f_{k-1}} \Rightarrow f_{k+1} > f_k.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως αυξουσα. Κατοπιν θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$0 < f_n < 2. \tag{11.58}$$

Αυτο προφανως ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$0 < f_{k+1} = \sqrt{1+f_k} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι φραγμενη απο το 0 και το 2. Αφου ειναι φραγμενη και μονοτονη, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι συγκλινουσα. Εστω

$$\phi = \lim_{n\to\infty} f_n \in [0, 2]. \tag{11.59}$$

Τοτε

$$f_{n+1} = \sqrt{1+f_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+f_n} \Rightarrow \phi = \sqrt{1+\phi} \Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Οι ριζες της $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ ειναι

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} > 0,$$
$$\phi_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < 0.$$

Λογω της (11.59) συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

11.2.12. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 3,$$
$$\forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{3}{2 f_{n-1}}.$$

Λύση. Καταρχην θα δειξουμε οτι για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n \geq \sqrt{3}$. Προφανως $f_n > 0$ και

$$\left(f_{n-1} - \sqrt{3}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow f_{n-1}^2 + 3 \geq 2 f_{n-1}\sqrt{3} \Rightarrow f_n = \frac{f_{n-1}^2 + 3}{2 f_{n-1}} \geq \sqrt{3}.$$

Κατοπιν δειχνουμε επαγωγικα οτι $f_n - f_{n-1} < 0$. Για $n = 0$ εχουμε

$$f_1 - f_0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{6} - 3 = -1 < 0.$$

Εστω οτι ισχυει και για $k \in \{0, 1, 2..., k\}$. Τωρα

$$f_{k+1} - f_k = \frac{f_k^2 + 3}{2f_k} - f_k = \frac{3 - f_k^2}{2f_k} \leq \frac{3 - \sqrt{3}^2}{2f_k} \leq 0$$

και απεδειχθη το ζητουμενο. Οποτε η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα και φραγμενη, αρα εχει οριο $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$, το οποιο θα ικανοποιει

$$\phi = \frac{\phi^2 + 3}{2\phi}.$$

Οποτε θα εχουμε $2\phi^2 = \phi^2 + 3 \Rightarrow \phi = \pm\sqrt{3}$, αλλα η αρνητικη τιμη απορριπτεται. Οποτε τελικα $\lim_{n\to\infty} f_n = \sqrt{3}$.

11.2.13. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 1,$$
$$\forall n \geq 1 : f_n = \sqrt{2 + 3f_{n-1}}.$$

Λύση. Προφανως $f_n > 0$. Επισης θα δειξουμε οτι επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n < 6$. Πραγματι ισχυει για $n = 0$ και εστω οτι ισχυει και για $n \in \{0, 1, 2..., k\}$. Τωρα εχουμε

$$f_k < 6 \Rightarrow 2 + 3f_k < 20 \Rightarrow f_{k+1} = \sqrt{2 + 3f_k} < \sqrt{20} < 6.$$

Ειναι ευκολο να δειξουμε επαγωγικα οτι $f_n < f_{n+1}$. Αυτο ισχυει για $n = 0$ (αφου $1 < \sqrt{5}$) και εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, 2..., k\}$. Τοτε εχουμε

$$f_k < f_{k+1} \Rightarrow 2 + 3f_k < 2 + 3f_{k+1} \Rightarrow f_{k+1} = \sqrt{2 + 3f}_k < \sqrt{2 + 3f_{k+1}} = f_{k+2}.$$

Οποτε η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και φραγμενη, αρα εχει οριο $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$, το οποιο θα ικανοποιει

$$\phi = \sqrt{2 + 3\phi}.$$

Οποτε θα εχουμε $\phi^2 = 2 + 3\phi$, με ριζες $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$ αλλα η αρνητικη ριζα απορριπτεται. Οποτε τελικα $\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{3+\sqrt{17}}{3}$.

11.2.14. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = \frac{1}{4},$$
$$\forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2}f_{n-1}^2 + \frac{1}{8}.$$

Λύση. Προφανως για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n > 0$. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$f_{n+1} < f_n. \tag{11.60}$$

Εχουμε $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

$$f_1 = \frac{1}{2}f_0^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} < \frac{1}{4} = f_0$$

οποτε η (11.60) ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$f_k < f_{k-1} \Rightarrow \frac{1}{2}f_k^2 + \frac{1}{8} < \frac{1}{2}f_{k-1}^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow f_{k+1} < f_k.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως φθινουσα. Αφου ειναι και θετικη, συμπεραινουμε οτι για καθε $n \geq 0$

$$0 < f_n \leq \frac{1}{4}. \tag{11.61}$$

Αφου η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι φραγμενη και μονοτονη, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι συγκλινουσα. Εστω

$$\phi = \lim_{n\to\infty} f_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]. \tag{11.62}$$

Τοτε

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}f_n^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f_n^2 + \frac{1}{8}\right) \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0.$$

Οι ριζες της $\frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0$

$$\phi_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{4},$$
$$\phi_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} < \frac{1}{4}.$$

Λογω της (11.62) συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

11.2.15. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$f_0 = 6,$$
$$\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{3 + f_n}$$

είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η ακολουθία $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$g_0 = 1,$$
$$\forall n \geq 0 : g_{n+1} = \sqrt{3 + g_n}$$

είναι γνησίως αύξουσα. Κατόπιν αποδείξτε ότι οι δύο ακολουθίες είναι συγκλίνουσες σε κοινό όριο.

Λύση. Ισχύουν τα εξής.

1. Προφανώς κάθε όρος της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι θετικός. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_{n+1} < f_n$. Έχουμε για $n = 0$

   $$f_1 = \sqrt{3+6} = 3 < 6 = f_0.$$

   Έστω ότι για καθε ν$\in \{0, 1, ..., k\}$ έχουμε $f_{k+1} < f_k$. Τότε

   $$3 + f_{k+1} < 3 + f_k \Rightarrow \sqrt{3 + f_{k+1}} < \sqrt{3 + f_k} \Rightarrow f_{k+2} < f_{k+1}.$$

   Άρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Προφανώς κάθε όρος της ακολουθίας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι θετικός. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $g_{n+1} > g_n$. Έχουμε για $n = 0$

$$g_1 = \sqrt{3+1} = 2 > 1 = g_0.$$

Έστω ότι για καθε ν$\in \{0, 1, \ldots, k\}$ έχουμε $g_{k+1} > g_k$. Τότε

$$3 + g_{k+1} > 3 + g_k \Rightarrow \sqrt{3 + g_{k+1}} > \sqrt{3 + g_k} \Rightarrow g_{k+2} > g_{k+1}.$$

Άρα η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

3. Επομένως έχουμε

$$g_1 < g_2 < g_3 < \ldots. < f_3 < f_2 < f_1.$$

Άρα υπαρχουν τα $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$, $\gamma = \lim_{n\to\infty} g_n$ και $\gamma \leq \phi$. Εχουμε

$$f_{n+1} = \sqrt{3 + f_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3 + f_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \sqrt{3 + \lim_{n\to\infty} f_n}$$
$$\Rightarrow \phi = \sqrt{3 + \phi} \Rightarrow \phi^2 = 3 + \phi.$$

Η εξίσωση $\phi^2 = 3 + \phi$ εχει ρίζες $\phi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}$, $\phi_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$. Η αρνητική ρίζα ϕ_2 απορρίπτεται και τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}.$$

Με ομοιο τροπο αποδεικνυουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

11.3 Αλυτα Προβληματα

11.3.1. Αποδειξε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$f_0 = 5, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

11.3.2. Να βρεθει ο ορος f_n της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

1. $f_0 = -3, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = 8 f_n$. *Απ.* $f_n = -3 \cdot 8^n$.
2. $f_0 = 7, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = 5 f_n - 6$. *Απ.* $f_n = \frac{11}{2} 5^n + \frac{3}{2}$.
3. $f_0 = 3, f_1 = -1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 3 f_{n+1} - 2 f_n$. *Απ.* $f_n = 7 - 2^{n+2}$.
4. $f_0 = 1, f_2 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = -f_n$. *Απ.* $f_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) i^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right)(-i)^n$.
5. $f_0 = 1, f_1 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = -2 f_{n+1} - 2 f_n$. *Απ.* $f_n = \left(\frac{1}{2} + i\right)(-1 - i)^n + \left(\frac{1}{2} - i\right)(-1 + i)^n$.

6. $f_0 = 3, f_1 = 5, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n$.*Απ.* $f_n = 3 + 2n$.
7. $f_0 = 3, f_1 = -1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n + 1$. *Απ.* $f_n = 6 - 3 \cdot 2^n - n$.
8. $f_0 = 1, f_2 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 1 - f_n$. *Απ.* $f_n = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right) i^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)(-i)^n + \frac{1}{2}$.
9. $f_0 = 3, f_1 = 5, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n + 2^n$. *Απ.* $f_n = 2 + n + 2^n$.
10. $f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt[3]{3f_n}$.

11.3.3. Να βρεθει ο ορος f_n της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

1. $\forall n \geq 0 : f_{n+2} = \frac{f_{n+1}+f_n}{3}$. *Απ.* $f_n = \frac{4}{6}(f_0 - f_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(f_0 + 2f_1)$.
2. $\forall n \geq 0 : f_{n+2} = \frac{f_{n+1}+f_n}{2} + n$.
   Απ.$f_n = \frac{4}{6}(f_0 - f_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(f_0 + 2f_1) + \frac{2}{3}f_1 - \frac{10}{27} - \frac{16}{9}n - \frac{8}{27}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}(n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right)$.
3. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} + f_n = f_n f_{n+1}$.
4. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} f_n = 2f_n + 1$.
5. $\forall n \geq 0 : f_{n+2} = f_n f_{n+1}$.
6. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} = 2f_n^2 - 1$.
7. $\forall n \geq 1 : f_n^2 = \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}}$.
8. $\forall n \geq 0 : f_{n+1}^2 - 5f_n f_{n+1} + 6f_n^2 = 0$.
9. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{1 - f_n^2}$.

11.3.4. Να βρεθει (αν υπαρχει) το οριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει.

1. $f_0 = \sqrt{2}, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{2 + f_n}$. *Απ.* $\sqrt{2}$.
2. $f_0 = \sqrt{2}, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{2f_n}$. *Απ.* 2.
3. $f_0 = 2, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{f_n^2 - f_n + 1}{f_n}$. *Απ.* 1.
4. Με $\vartheta \in \left(0, \frac{1}{4}\right) : f_0 = \frac{2}{3}, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n^2 + \vartheta$. *Απ.* $\frac{1 - \sqrt{1 - 4\vartheta}}{2}$.
5. Με $c \in (-1, 0) : f_0 = c, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n + f_n^2$.
6. $f_0 = c, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n + \frac{2 - f_n^2}{2f_n}$. *Απ.* $\sqrt{2}$.
7. $f_0 = 2, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{4}{3 + f_n^2}$. *Απ.* 1.
8. $f_0 = c > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + f_n^2}$. *Απ.* $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. $f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f_n^4+16f_n}{4+f_n^3}$. *Απ.* 2.

10. $f_0 = \frac{1}{2}, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = (1 - f_n)^2$.*Απ.* Το οριο δεν υπαρχει.

11.3.5. Να βρεθει (αν υπαρχει, για διαφορες τιμες του $\xi > 1$) το οριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = \xi, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n^2 - 2f_n + 2.$$

Απ. (α) Για $\xi < 2$: $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$, (β) για $\xi = 2$: $\lim_{n\to\infty} f_n = 2$, (γ) για $\xi < 2$: $\lim_{n\to\infty} f_n = 2$.

11.3.6. Δινονται a, b τετοιοι ωστε $\frac{b-a}{b+a} \in (-1, 1)$. Να βρεθει (αν υπαρχει) το οριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{a + bf_n}{b + af_n}.$$

Απ. 1.

11.3.7. Έστω ακολουθία $(h_n(a))_{n=0}^{\infty}$ η οποία ορίζεται με

$$h_0(a) = a, \forall n \geq 0 : h_{n+1}(a) = \sqrt{3 + h_n(a)}.$$

Μελετείστε την σύγκλιση της $(h_n(a))_{n=0}^{\infty}$ σε σχέση με τις τιμές του a.

11.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

11.4.1. Βρες τον ορο f_n της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει.

1. $f_0 = 1, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = n + (n + 1) f_n$.
2. $\forall n \geq 0 : f_n + f_{n+1} = f_n f_{n+1}$.
3. $\forall n \geq 0 : f_n f_{n+1} = 2f_n + 1$.
4. $f_0 = 2, \forall n \geq 0 : f_{n+1}^3 = 3f_n$.
5. $f_0 = a > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = 2f_n^2 - 1$.
6. $f_0 = a \in (0, 1), \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{1 - f_n^2}$.
7. $f_0 = a > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{b}{f_n}\right)$.
8. $f_0 = 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \sqrt{2 + f_n}$.

11.4.2. Υπολογισε (αν υπαρχει) το $\lim_{n\to\infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει.

1. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{a}{f_n} - 1$ (με $a > 0$).
2. $f_0 = a > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt[n+2]{1 + f_n^{n+1}}$ (με $a > 0$).

3. $\forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{f_n + f_{n-1}}{2}$.
4. $f_0 = 1, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{(n-1)}{(n+1)f_n + 1}$.
5. $f_0 = 1, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{(n-1)}{(n+1)f_n + 1}$.
6. $f_0 = 2, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{f_n^2 - f_n + 1}{f_n}$.
7. $f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n + \frac{2 + f_n}{1 + 3f_n}$. *Απ.* -2.
8. $f_0 = c \in (0, 1), \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{2 + f_n}{3 + 4f_n}$.*Απ.* $1/2$.
9. $f_0 = a, f_1 = b, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{f_n + f_{n-1}}{2}$.
10. $f_0 = a > 0, f_1 = b > 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \sqrt{f_n f_{n-1}}$.
11. $f_0 = a > 0, f_1 = b > 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n-1}}}$.
12. $f_0 = c_1, \quad f_1 = c_2, \forall n \geq 1 : f_{n+2} + a_1 f_{n+1} + a_0 f_n = b$.

11.4.3. Η ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ικανοποιει

$$\forall n \geq 1 : f_{n+1} = (n+2) f_n - n f_{n-1}.$$

Δειξε οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n!} = f_2 (e - 2) - f_1 (e - 5)$.

11.4.4. Οι ακολουθιες $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, $(g_n)_{n=0}^{\infty}$, $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ ικανοποιουν

$$\begin{aligned} f_0 &= a > 0, \quad g_0 = b > 0, \quad h_0 = c > 0, \\ f_{n+1} &= \frac{f_n + g_n + h_n}{3}, \\ g_{n+1} &= \sqrt[3]{f_n g_n h_n}, \\ h_{n+1} &= \frac{3}{\frac{1}{f_n} + \frac{1}{g_n} + \frac{1}{h_n}}. \end{aligned}$$

Δειξε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} h_n$.

11.4.5. Ορίζουμε μια ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ως εξής:

$$f_0 = c > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{a f_n + b}.$$

Δείξε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ και ισούται με την θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - ax - b = 0$.

11.4.6. Ορίζουμε μια ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ως εξής:

$$f_0 = c > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{a f_n^2 + b},$$

όπου $a \in (0, 1)$. Δείξε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = \sqrt{\frac{b}{1-a}}$.

11.4.7. Ορίζουμε μια ακολουθία κλασμάτων $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ως εξής: $f_0 = 1$ και $f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_n}$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 1 + \frac{1}{1} \\ f_2 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \\ &\dots \\ f_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{f_n}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Δείξτε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n$, υπολογισε την τιμή του και σχολιάστε την σχέση αυτού με την ακολουθία *Fibonacci*.

11.4.8. Έστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η ακολουθία *Fibonacci*. Αποδειξε ότι

1. $f_{n+2} + f_{n-2} = 3f_n$.
2. $f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1} = f_{m+n}$.
3. $f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2$.
4. $f_0 + f_1 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$.
5. $\Phi^n = f_{n-1} + \Phi f_n$.
6. $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$.
7. $(f_n)^2 - f_{n+1}f_{n-1} = (-1)^{n-1}$.
8. $(f_n)^2 - f_{n+k}f_{n-k} = (-1)^{n-k}$.

11.4.9. Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ η ακολουθία *Fibonacci*. Αποδειξε ότι

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = f_0 x + f_1 x^2 + f_2 x^3 + \dots.$$

11.4.10 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{f_0 + f_1 + \dots + f_n}.$$

Αποδειξε ότι $\lim_{n\to\infty} f_0 + f_1 + \dots + f_n = \infty$.

11.4.11 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\forall n \geq 0 : f_{n+1} = 1 + f_n - \frac{1}{2}(f_n)^2.$$

Αποδειξε ότι, για κάθε $n \geq 3$, $\left|x_n - \sqrt{2}\right| < 2^{-n}$.

11.4.12 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &f_0 = 3, \\ &f_1 = 4, \\ &\forall n \geq 2 : (n+1)(n+2) f_n = 4(n+1)(n+3) f_{n-1} - 4(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Υπολογισε τον ορο f_n.

11.4.13 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$f_0 = 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}.$$

Δειξε οτι η ποσοτητα $f_n^2 - f_{n+1} f_{n-1}$ δεν εξαρταται απο το a.

11.4.14 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1 + 4f_n + \sqrt{1 + 24 f_n}}{16}.$$

Υπολογισε τον ορο f_n.

11.4.15 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\forall m, n \geq 0 : f_{n+m} \leq f_m + f_n.$$

Αποδειξε ότι υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n}$.

11.4.16 (Μαθ. Ολυμπιάδα). Έστω θετικη ακολουθία $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi > 0$. Αποδειξε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = \phi$.

Κεφάλαιο 12

Σειρες

Μια *σειρα* ειναι το αθροισμα των *απειρων* ορων μιας ακολουθιας. Η σειρα παιζει στην θεωρια των ακολουθιων τον ρολο που παιζει το ολοκληρωμα στην θεωρια των συναρτησεων μιας συνεχους μεταβλητης.

12.1 Θεωρια και Παραδειγματα

12.1.1. Ορισμος: Εστω μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Σχηματιζουμε μια νεα ακολουθια $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ως εξης:

$$\begin{aligned}
s_1 &= f_1, \\
s_2 &= f_1 + f_2, \\
s_3 &= f_1 + f_2 + f_3, \\
&\dots, \\
s_N &= f_1 + \dots + f_N, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Τα στοιχεια s_1, s_2, s_3, ..., $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, ... λεγονται *μερικα αθροισματα*. Το *απειρο αθροισμα* ή *σειρά* ειναι το

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n$$

Καταχρηστικα, χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ακομη και οταν το οριο δεν υπαρχει.

12.1.2. Παραδειγμα: Εστω η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{2^n}$. Σε αυτην αντιστοιχει η σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \dots .$$

Με ποιον αριθμο ισουται η παραπανω σειρα;

12.1.3. Ορισμος: Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ λεγεται

1. *συγκλινουσα* οταν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$,

2. *αποκλινουσα* οταν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = -\infty$ και

3. *ταλαντευομενη* σε καθε αλλη περιπτωση.

   Επισης χρησιμοποιουμε τις εκφρασεις «*η σειρα συγκλινει*», «*η σειρα αποκλινει*», «*η σειρα ταλαντευεται*».

12.1.4. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$.
Λυση. Αν $a \neq 1$ εχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = a + a^2 + ... + a^N = a\left(1 + a^2 + ... + a^{N-1}\right) = a\frac{1 - a^N}{1 - a} \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \lim_{N\to\infty} a\frac{1 - a^N}{1 - a}$$

υπο την προυποθεση οτι το οριο υπαρχει. Διακρινουμε τις εξης περιπτωσεις.

1. Αν $a \in (-1, 1)$, τοτε $\lim_{N\to\infty} a\frac{1-a^N}{1-a} = \frac{a}{1-a}$ οποτε και $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$.
2. Αν $a = 1$, τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = (1 + 1 + 1 + ...) = \infty$.
3. Αν $a \in (1, \infty)$, τοτε $\lim_{N\to\infty} a\frac{1-a^N}{1-a} = \infty$ οποτε και $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \infty$.
4. Αν $a \in (-\infty, -1]$ η $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ ταλαντευεται (γιατι;).

12.1.5. Παραδειγμα: Εχουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

12.1.6. Συμβολισμος: Ο συμβολισμος αθροισματος μπορει να επεκταθει με προφανεις τροπους. Π.χ., αν εχουμε ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ μπορουμε να ορισουμε την σειρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} (f_0 + f_1 + ... + f_N).$$

Γενικοτερα, για καθε συνολο $A \subseteq \mathbb{Z}$, μπορουμε να ορισουμε την σειρα

$$\sum_{n\in A} f_n$$

εαν οι οροι f_n ειναι ορισμενοι για καθε $n \in A$.

12.1.7. Παραδειγμα: Εστω $A = \{1, 3, 5, ...\}$. Τοτε

$$\sum_{n\in A} f_n = f_1 + f_3 + f_5 + ... \quad .$$

12.1.8. Ασκηση: Υπολογισε το $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ οταν $a \in (-1, 1)$.
Λυση. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1 - a} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = a^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n = 1 + \frac{a}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

12.1.9. Θεωρημα: Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g \in \mathbb{R}$. Τοτε, για καθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 f_n + c_2 g_n) = c_1 f + c_2 g.$$

12.1.10. Παραδειγμα: Δινεται οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$. Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{-7}{3^n} \right) = 3 \cdot 1 + (-7) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

12.1.11. Ερωτηση: Πως μπορει να επεκταθει το Θεωρημα 12.1.9 αν καποια απο τα c_1, c_2, f, g δεν ανηκουν στο $\mathbb{R}$;

12.1.12. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$.
Λυση. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \infty + 1 = \infty.$$

12.1.13. Ασκηση: Υπολογισε $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-n)$.
Λυση. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) = \infty - \infty$$

το οποιο ειναι απροσδιοριστο. Παρατηρειστε οτι

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(n^2 - n \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n(n-1) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} n(n-1) = \infty.$$

Αρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - n \right).$$

12.1.14. Θεωρημα: Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ τετοιες ωστε $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} g_n = g \in \mathbb{R}$. Τοτε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \right) = fg.$$

12.1.15. Θεωρημα: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$, τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.
Αποδειξη. Θεωρησε τα μερικα αθροισματα $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Εχουμε $s_N - s_{N-1} = f_N$. Επισης

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} s_{N-1} = f.$$

Οποτε

$$\lim_{N\to\infty} f_N = \lim_{N\to\infty} (s_N - s_{N-1}) = \lim_{N\to\infty} s_N - \lim_{N\to\infty} s_{N-1} = f - f = 0.$$

12.1.16. Ασκηση: Δειξε οτι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ δεν συγκλινει.
Λυση. Αν συνεκλινε, θα ειχαμε $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 0$. Αλλα ξερουμε οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

12.1.17. Θεωρημα: Εστω *μη αρνητικη* ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ (δηλ. $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \geq 0$). Τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειτε συγκλινει ειτε αποκλινει.
Αποδειξη. Θεωρησε τα μερικα αθροισματα $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Προφανως η $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα (γιατι;). Υπαρχουν δυο ενδεχομενα.

1. Αν $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και φραγμενη, τοτε συγκλινει σε πραγματικο αριθμο.
2. Αν $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και μη φραγμενη, τοτε αποκλινει (συγκλινει στο $+\infty$).

12.1.18. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Λυση. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots.$$

Οριζουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}.$$

Προφανως η $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι γνησιως αυξουσα. Επισης εχουμε

$$\begin{aligned}
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \\
s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{16} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Και γενικοτερα

$$s_{2^{m+1}} = \sum_{m=1}^{2^{m+1}} \frac{1}{m} > \frac{3}{2} + \frac{m}{2}.$$

Αρα η υποακολουθια $(s_{2^{m+1}})_{m=1}^{\infty}$ δεν ειναι φραγμενη, οποτε και η ακολουθια $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και μη φραγμενη, οποτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

12.1.19. Θεωρημα: Εστω ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq f_n \leq g_n.$$

Τοτε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty.$$

12.1.20. Ασκηση: Δειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} < \infty$.
Λυση. Εχουμε

$$\left(\forall n \geq 1 : \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

12.1.21. Ασκηση: Δειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$.
Λυση. Εχουμε

$$\left(\forall n \geq 1 : \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\infty = \infty.$$

12.1.22 (Κριτηριο Λογου). Θεωρημα: Εστω *μη αρνητικη* ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $a = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Τοτε ισχυουν τα εξης:

$$a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty,$$

$$a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty.$$

Αποδειξη. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = a < 1$. Εστω $\varepsilon = 1 - a$. Τοτε υπαρχει n_ε τετοιο ωστε

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\forall n \geq n_\varepsilon : f_{n+1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) f_n \Rightarrow$$
$$\forall m \geq 1 : f_{n+m} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^m f_{n_\varepsilon}.$$

Οποτε εχουμε

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} f_n < \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{n_\varepsilon} \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n = f_n^{n_\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n = A < \infty$$

(αφου $0 < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$). Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon - 1} f_n + \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon - 1} f_n + A < \infty.$$

12.1.23. Παρατηρηση: Προσεξε οτι οταν $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = a = 1$, το κριτηριο του λογου δεν οδηγει σε συμπερασαμα σχετικα μετην συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

12.1.24. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.
Λυση. Εχουμε $f_n = \frac{5^n}{n!}$ και

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{5^{n+1}/(n+1)!}{5^n/n!} = \frac{5}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$

Αρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} < \infty$.

12.1.25 (Κριτηριο Ριζας). Θεωρημα: Εστω *μη αρνητικη* ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}$. Τοτε ισχυουν τα εξης:

$$a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty,$$
$$a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty.$$

12.1.26. Παρατηρηση: Και παλι, οταν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = a = 1$, το κριτηριο της ριζας δεν οδηγει σε συμπερασαμα σχετικα μετην συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

12.1.27. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$.
Λυση. Εχουμε $f_n = \frac{5^n}{n^n}$ και

$$\sqrt[n]{f_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^n}} = \frac{5}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0.$$

Αρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n} < \infty$.

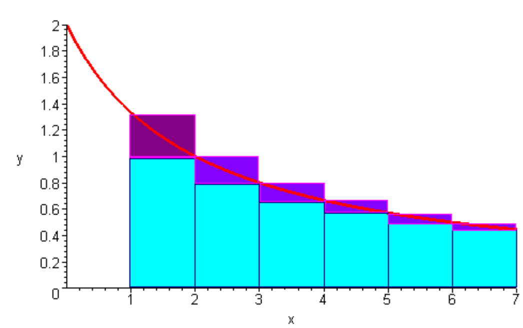
12.1.28 (Κριτηριο Ολοκληρωματος). Θεωρημα: Εστω οτι η $F(x)$ ειναι θετικη και φθινουσα στο διαστημα $[N, \infty)$ (για καποιο $N \geq 1$). Οριζουμε την ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = F(n)$. Τοτε

$$\int_N^{\infty} F(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty, \tag{12.1}$$
$$\int_N^{\infty} F(x)dx = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty. \tag{12.2}$$

Αποδειξη. Μας είναι δοσμένη η συνάρτηση $F(x) \geq 0$. Οριζουμε δύο ακόμη συναρτήσεις:

$$\forall n \in \{1, 2, ...\}, \forall x \in [n, n+1) : \overline{F}(x) = F(n+1)$$
$$\forall n \in \{1, 2, ...\}, \forall x \in [n, n+1) : \underline{F}(x) = F(n)$$

Στο Σχήμα 12.1 φαίνεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\underline{F} \leq F(x) \leq \overline{F}(x)$.



Σχ.12.1: Το κριτηριο ολοκληρωματος.

Οπότε έχουμε και

$$\int_1^\infty \underline{F}(x)\,dx \le \int_1^\infty F(x)\,dx \le \int_1^\infty \overline{F}(x)\,dx.$$

Αλλά,

$$\int_1^\infty \underline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} \underline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} F(n+1) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n$$

$$\int_1^\infty \overline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} \overline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Οπότε έχουμε

$$\int_1^\infty F(x)\,dx = \infty \Rightarrow \int_1^\infty \overline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$$

και

$$0 \le \int_1^\infty F(x)\,dx < \infty \Rightarrow 0 \le \int_1^\infty \underline{F}(x)\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} f_n < 0 \Rightarrow$$

$$0 \le f_1 \le f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n < \infty \Rightarrow 0 \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty.$$

12.1.29. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.
Λυση. Εχουμε $f_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$· αν θεσουμε $F(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ τοτε $f_n = F(n)$. Επειδη

$$\int \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \int \frac{1}{\ln(x+1)}\frac{d(x+1)}{\ln(x+1)} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\ln(x+1))$$

και

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \ln(\ln(x+1))|_{x=1}^{\infty} = \ln(\ln\infty) - \ln(\ln 2) = \ln(\infty) - \ln(\ln 2) = \infty$$

συμπεραινουμε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \infty$.

12.1.30. Θεωρημα: Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ εχει την εξης συμπεριφορα.

1. $k \le 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \infty$.
2. $k > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty$.

Αποδειξη. Εχουμε $f_n = n^k$, $F(x) = x^k$ και

$$\int \frac{1}{x^k}dx = \int x^{-k}dx = \begin{cases} \frac{x^{1-k}}{1-k} & \text{για} \quad k \ne 1 \\ \ln x & \text{για} \quad k = 1 \end{cases}.$$

Θα εξετασουμε τρεις διαφορετικες περιπτωσεις.

1. $k > 1$. Τοτε
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k} dx = \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{k-1} < \infty$$
αρα για $k > 1$ εχουμε $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k} < \infty$, δηλ. η σειρα συγκλινει.

2. $k = 1$. Τοτε
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k} dx = [\ln x]_{x=a}^{x=\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \infty.$$
Αρα για $k = 1$ εχουμε $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$, δηλ. η σειρα αποκλινει.

3. $k < 1$. Τοτε
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k} dx = \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{1-k} \lim_{M\to\infty} \left(M^{1-k} - 1^{1-k} \right) = \infty$$
(αφου $1 - k > 0$). Αρα για $k < 1$ εχουμε $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k} = \infty$, δηλ. η σειρα αποκλινει.

12.1.31. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση των $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/2}}$.
Λυση. Συμφωνα με το Θεωρημα 12.1.30:
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/2}} < \infty.$$

12.1.32. Ορισμος: Εστω μη αρνητικη ακολουθια $(f_n)_{n=1}^\infty$. Η σειρα
$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} f_n = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots$$
λεγεται *εναλασσουσα*.

12.1.33. Θεωρημα: Εστω μη αρνητικη και φθινουσα ακολουθια $(f_n)_{n=1}^\infty$ τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Τοτε η εναλασσουσα σειρα
$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} f_n = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots$$
συγκλινει (σε πραγματικο αριθμο).

12.1.34. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \quad .$$
Λυση. Η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^\infty$ με $f_n = \frac{1}{n}$ ειναι μη αρνητικη, φθινουσα και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Οποτε, συμφωνα με το Θεωρημα 12.1.33,
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = A < \infty$$
Επισης $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} > 0$ (γιατι;).

12.1.35. Ορισμος: Λεμε οτι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι *απολυτως συγκλινουσα* ανν $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$.

12.1.36. Θεωρημα: Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Οριζουμε δυο συνολα φυσικων αριθμων

$$A_+ = \{n : f_n \geq 0\} \text{ και } A_- = \{n : f_n < 0\}.$$

Τοτε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n\in A_+} |f_n| + \sum_{n\in A_-} |f_n| = \sum_{n\in A_+} f_n + \left(-\sum_{n\in A_-} f_n\right) < \infty.$$

Επειδη τα αθροισματα $\sum_{n\in A_+} f_n$ και $\left(-\sum_{n\in A_-} f_n\right)$ ειναι μη αρνητικα, συμπεραινουμε οτι

$$\sum_{n\in A_+} f_n = a_1 \in \mathbb{R}, \qquad -\sum_{n\in A_-} f_n = a_2 \in \mathbb{R}$$

(δηλ. τα a_1, a_2 ειναι πεπερασμενα). Αλλα τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n\in A_+} f_n + \sum_{n\in A_-} f_n = a_1 - a_2 = f \in \mathbb{R}.$$

12.1.37. Παρατηρηση: Με αλλα λογια, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι απολυτως συγκλινουσα τοτε ειναι και συγκλινουσα.

12.1.38. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = a < \infty.$$

Αφου η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ συγκλινει απολυτως, τοτε συγκλινει (σε πραγματικο αριθμο).

12.1.39. Παρατηρηση: Σε αρκετες περιπτωσεις η συγκλιση μιας ακολουθιας αποδεικνυεται χρησιμοποιωντας ενα συνδυασμο των παραπανω θεωρηματων και επιπλεον *τεχνασματων* οπως αυτα των επομενων παραδειγματων.

12.1.40. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+4}{n^2+3n+5}$.
Λυση. Οριζουμε την συναρτηση $F(x) = F(x)$ και την ακολυθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = F(n) = \frac{3n+4}{n^2+3n+5}$. Τωρα,

$$F'(x) = -\frac{3x^2 + 8x - 3}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

και οι ριζες της $F'(x) = 0$ ειναι οι $-3, \frac{1}{3}$. Στο διαστημα $[1, \infty)$ η $F(x)$ ειναι φθινουσα, οποτε η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα ακολουθια. Επιπλεον η

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+4}{n^2+3n+5}$$

ειναι εναλασσουσα, αρα συγκλινει σε πραγματικο αριθμο.

12.1.41. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+5^n}$.
Λυση. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+5^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{3/5}{1-3/5} = \frac{3}{2}.$$

Αρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+5^n}$ συγκλινει πραγματικο αριθμο.

12.1.42. Ασκηση: Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+5^n}$.
Λυση. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+5^n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2\cdot 5^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n} = \infty.$$

Αρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+5^n}$ αποκλινει στο ∞.

12.1.43. Ασκηση: Υπολογισε το αθροισμα $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$.
Λυση. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Οποτε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{N\cdot(N+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Δηλ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{N\cdot(N+1)}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1. \end{aligned}$$

12.1.44. Ασκηση: Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.
Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \infty \end{aligned}$$

Άρα η σειρά τείνει στο άπειρο.

12.2 Λυμενα Προβληματα

12.2.1. Υπολογισε το αθροισμα $\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots$.
Λυση. Συμφωνα με την Ασκηση 12.1.4 ειναι

$$\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots.=\frac{1/5}{1-1/5}=\frac{1}{4}.$$

12.2.2. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots.$
Λυση. Οριζουμε την ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n=\frac{n}{2n+1}$. Τοτε η ζητουμενη σειρα ειναι $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$. Αφου $\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}>0$, η σειρα αποκλινει.

12.2.3. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{5}{n(n+1)}\right)$.
Λύση. Συμφωνα με την Ασκηση 12.1.4 ειναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

και συμφωνα με την Ασκηση 12.1.43 ειναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

Οποτε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{5}{n(n+1)}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=3\cdot 1+5\cdot 1=8.$$

12.2.4. Δειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}<\infty$.
Λυση. Εχουμε

$$\left(\forall n\geq 1:\frac{1}{3^n+2}<\frac{1}{3^n}\right)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}<\infty.$$

12.2.5. Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(2n+1)$.
Λύση. Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(2n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)>\sum_{n=1}^{\infty}3n^2=\infty$.

12.2.6. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n=\frac{1}{n2^n}$. Το οριο του λογου $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ειναι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}<1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

12.2.7. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n=\frac{n}{2^n}$. Το οριο του λογου $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ειναι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)/2^{n+1}}{n2^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}=\frac{1}{2}<1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

12.2.8. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Έχουμε $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/5^{n+1}}{n!5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5} = 0$. Άρα η σειρά συγκλίνει.

12.2.9. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{1}{n!}$. Το οριο του λογου $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ειναι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n\cdot(n+1))}{1/(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

12.2.10. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο της ριζας. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{1}{n^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

12.2.11. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο της ριζας. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

12.2.12. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.
Λυση. Η σειρα συγκλινει συμφωνα με το Θεωρημα 12.1.30.

12.2.13. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Λυση. Η σειρα αποκλινει συμφωνα με το Θεωρημα 12.1.30.

12.2.14. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

αρα η σειρα συγκλινει.

12.2.15. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$.
Λυση. Οριζουμε την ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n^n}$. Τοτε η ζητουμενη σειρα ειναι $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$. Εχουμε

$$\forall n\in\mathbb{N} : f_n = \frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n} \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

αρα η σειρα συγκλινει.

12.2.16. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.$$

Λυση. Ο n-στος ορος ειναι $g_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=(-1)^{n-1}f_n$, όπου $f_n=\frac{1}{n}$. Η σειρα ειναι εναλασσουσα, για καθε n ισχυει $f_n>f_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty}f_n=0$. Αρα η σειρα συγκλινει.

12.2.17. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots.$$

Λυση. Ο n-στος ορος ειναι $g_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=(-1)^{n+1}f_n$, όπου $f_n=\frac{1}{n^2}$. Η σειρα ειναι εναλασσουσα και για καθε n ισχυει $f_n>f_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty}f_n=0$. Αρα η σειρα συγκλινει.

12.2.18. Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.
Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\&<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<\infty\end{aligned}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

12.2.19. Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}}$, όταν $|a|<1$.
Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1+a^{2^{n-1}}-1}{1-a^{2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}}-\frac{1}{1-a^{2^n}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1+a^{2^{n-1}}}{(1-a^{2^{n-1}})(1+a^{2^{n-1}})}-\frac{1}{1-a^{2^n}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-a^{2^{n-1}}}-\frac{1}{1-a^{2^n}}\right)\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}}&=\left(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^2}\right)+\left(\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{1-a^3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1-a^{2^{N-1}}}-\frac{1}{1-a^{2^N}}\right)\\&=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{2^N}}\end{aligned}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^{2^N}} \right)$$
$$= \frac{1}{1-a} - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-a^{2^N}} = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}.$$

12.2.20. Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{n}$.
Λύση. Έχουμε $|\sin x| \le |x|$ (γιατί;). Οπότε

$$0 \le \left| \frac{\sin(\pi/n)}{n} \right| = \frac{1}{n} |\sin(\pi/n)| \le \frac{\pi}{n^2}$$

και

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\pi/n)}{n} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2} < \infty.$$

Αφου η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{n}$ ειναι απολυτως συγκλινουσα, ειναι και συγκλινουσα.

12.2.21. Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\vartheta}{2^n}$, όταν $\vartheta \in [0, \pi/2]$.
Λύση. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\vartheta}{2^n} = \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\vartheta}{2^n}}{\frac{\vartheta}{2^n}} = \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

όπου $f_n = \frac{\sin\frac{\vartheta}{2^n}}{\frac{\vartheta}{2^n}}$. Αλλά, αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, θα έχουμε και $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\vartheta}{2^n}}{\frac{\vartheta}{2^n}} = 1$. Αφού λοιπόν $\lim_{n\to\infty} f_n > 0$, θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\vartheta}{2^n} = \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$.

12.2.22. Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.
Λύση. Προσέξε ότι το άθροισμα αρχίζει από $n = 0$. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots = e^a,$$

όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3.

12.2.23. Εξετασε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ όταν $a > 0$.
Λύση. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου. Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right] \cdot \frac{n^n}{a^n n!} = \lim_{n\to\infty} \left[a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \right] = \frac{a}{e}.$$

Οπότε, όταν $a < e$ η σειρά συγκλίνει και όταν $a > e$ τείνει στο άπειρο.

12.2.24. Υπολογισε το $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{A}{n+2} - \frac{B}{n+3} = \frac{(A-B)\,n + (3A-2B)}{n^2+5n+6}.$$

Ευκολα βρισκουμε οτι $A = B = 1$, οποτε

$$\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

12.2.25. Εστω θετικη ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Οριζουμε την $F(x)$ οπως στο Θεωρημα 12.1.28. Επισης οριζουμε $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ και το *σφαλμα προσεγγισης n-στης* ταξης

$$r_N = |s - s_N|.$$

Αποδειξε οτι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι συγκλινουσα, τοτε

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{n+1}^{\infty} F(x)\,dx < r_n < \int_{n}^{\infty} F(x)\,dx.$$

Λυση. Οριζουμε και τις $\underline{F}(x)$, $\overline{F}(x)$ οπως στο Θεωρημα 12.1.28. Χρησιμοποιωντας αυτες, βλεπουμε οτι για καθε n εχουμε

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{m}^{m+1} F(x)\,dx < r_n = \sum_{m=1}^{\infty} f_{n+m} < \sum_{m=n}^{\infty} \int_{m}^{m+1} F(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\int_{n+1}^{\infty} F(x)\,dx < r_n < \int_{n}^{\infty} F(x)\,dx.$$

12.2.26. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}$. Ποιο ειναι το σφαλμα προσεγγισης r_{10} του s απο το s_{10};
Λυση. Απο την προηγουμενη ασκηση εχουμε

$$2.5044 \times 10^{-4} = \frac{1}{3993} = \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx < r_{10} < \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3000} = 3.3333 \times 10^{-4}.$$

12.2.27. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$. Ποιας ταξης προσεγγιση N πρεπει να παρουμε ωστε το σφαλμα προσεγγισης r_N να ειναι μικροτερο του 10^{-2};
Λυση. Εχουμε

$$|r_N| < \int_{N}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3N^3}.$$

Θελουμε

$$10^{-2} > \frac{1}{3N^3} \Rightarrow N^3 > \frac{100}{3} \Rightarrow N > \sqrt[3]{\frac{100}{3}} = 3.2183.$$

Οποτε χρειαζομαστε προσεγγιση ταξεως τουλαχιστον $N_{\min} = 4$.

12.2.28. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η λυση της

$$f_0 = 5,$$
$$\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n.$$

Υπολογισε το $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
Λυση. Θα μπορουσαμε να επιλυσουμε την εξισωση διαφορων και να αθροισουμε τα f_n. Αλλα αυτο δεν ειναι απαραιτητο. Εχουμε

$$\begin{aligned} f_0 &= 5 \\ f_1 &= \frac{1}{2} f_0 \\ f_2 &= \frac{1}{2} f_1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Αθροιζοντας τα αριστερα και δεξια μελη παιρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 5 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n = 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n = 5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n = 10.$$

12.2.29. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η λυση της

$$f_0 = 5,$$
$$\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n + 3.$$

Υπολογισε το $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
Λυση. Παιρνοντας το οριο εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} f_n + 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} f_n = 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = 6 \neq 0.$$

Οποτε $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \infty$.

12.2.30. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η λυση της

$$f_0 = 1,$$
$$f_1 = 1,$$
$$\forall n \geq 0 : f_{n+2} = \frac{5}{6} f_{n+1} - \frac{1}{6} f_n.$$

Υπολογισε το $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Λυση. Θα μπορουσαμε να επιλυσουμε την εξισωση διαφορων και να αθροισουμε τα f_n. Αλλα αυτο δεν ειναι απαραιτητο. Εχουμε

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= \frac{5}{6}f_1 - \frac{1}{6}f_0 \\ f_3 &= \frac{5}{6}f_2 - \frac{1}{6}f_1 \\ f_4 &= \frac{5}{6}f_3 - \frac{1}{6}f_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Αθροιζοντας τα αριστερα και δεξια μελη παιρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n &= 1 + 1 + \frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty} f_n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n &= 2 + \frac{5}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Rightarrow \\ \frac{2}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n &= \frac{7}{6} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

12.2.31. Υπολογισε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.
Λύση. Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Ομως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} - 1 = e - 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

Τελικα λοιπον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e - 1.$$

12.2.32. Υπολογισε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!}$.
Λύση. Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}.$$

Απο την προηγουμενη ασκηση εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$$

οποτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} = 2e - 2$$

και

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 2e.\end{aligned}$$

Τελικα λοιπον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!} = 4e - 2$$

12.3 Αλυτα Προβληματα

12.3.1. Υπολογισε τα παρακατω αθροισματα.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. *Απ.* $\frac{1}{2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. *Απ.* $-\frac{1}{4}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. *Απ.* $\frac{3}{4}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. *Απ.* $\frac{3}{4}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. *Απ.* $\frac{1}{4}$.

12.3.2. Υπολογισε τα παρακατω αθροισματα.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^n$. *Απ.* ∞.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. *Απ.* ∞.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{3/2}$. *Απ.* ∞.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. *Απ.* 1.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Απ.* $\frac{1}{6}\pi^2$.

12.3.3. Υπολογισε τα παρακατω αθροισματα.

1. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} \dots$.

2. $\frac{5}{16} + \frac{13}{36} + \frac{35}{216} + \dots$.
3. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots$.
4. $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \dots$.
5. $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{18} + \dots$.

12.3.4. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+2n^3-1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n\ln n}{n^5+2n^3-1}$.

12.3.5. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}}{n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}\right)$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n-1}{n+1}$.

12.3.6. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$.
2. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$.
3. $1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \dots$.

4. $\frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{24} + \dots$.
5. $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6} + \dots$.
6. $\sin\pi + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{9} + \dots$.
7. $\sin\partial + \frac{\sin 2\partial}{4} + \frac{\sin 3\partial}{9} + \dots$.
8. $\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{12} + \dots$.

12.3.7. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+1}$. Ποιο ειναι το σφαλμα προσεγγισης r_5 του s απο το s_5;

12.3.8. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+n+1}$. Ποιας ταξης προσεγγιση N πρεπει να παρουμε ωστε το σφαλμα προσεγγισης r_N να ειναι μικροτερο του 10^{-2};

12.3.9. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2 n}{n^2}$. Ποιας ταξης προσεγγιση N πρεπει να παρουμε ωστε το σφαλμα προσεγγισης r_N να ειναι μικροτερο του 10^{-2};

12.3.10. Βρες τις τιμες του a για τις οποιες συγκλινει η $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln a)^n$.

12.3.11. Υπολογισε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}$.

12.3.12. Υπολογισε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$.

12.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

12.4.1. Αποδειξε οτι: αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g \in \mathbb{R}$, τοτε για καθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 f_n + c_2 g_n) = c_1 f + c_2 g.$$

12.4.2. Αποδειξε οτι: αν οι $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι τετοιες ωστε

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le f_n \le g_n$$

τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty.$$

12.4.3. Αποδειξε το Κριτηριο της Ριζας.

12.4.4. Αποδειξε οτι: αν η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι μη αρνητικη και φθινουσα και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, τοτε η

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots$$

συγκλινει.

12.4.5. Αποδειξε οτι: για καθε $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ και καθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχυει:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \left(b_{k+1} - b_k\right) + \sum_{k=m}^{n} b_{k+1} \left(a_{k+1} - a_k\right) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m.$$

Ποιον ολοκληρωτικο τυπο σου θυμιζει αυτο;

12.4.6. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{\left(n^2+3n+2\right)^2}$.

12.4.7. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. *Απ.* $\frac{\pi^4}{90}$.

12.4.8. Υπολογισε το αθροισμα $1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots$.

12.4.9. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+x^{2^n}}$ για καθε $x \in (1, \infty)$.

12.4.10. Υπολογισε το *απειρογινομενο* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2}\right)$.

12.4.11. Υπολογισε το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ για διαφορες τιμες του p.

12.4.12. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

12.4.13. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

12.4.14. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

12.4.15. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n(\vartheta)$ για διαφορες τιμες του ϑ.

12.4.16. Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με όρους μη αρνητικούς. Αποδειξε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} f_n < \infty.$$

12.4.17. Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με όρους μη αρνητικούς. Αποδειξε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{f_n f_{n+1}} < \infty.$$

12.4.18. Βρες ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots \geq 0,$$
$$g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \ldots \geq 0,$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(f_n, g_n\right) < \infty$$

ή αποδειξε οτι δεν μπορουν να υπαρχουν τετοιες ακολουθιες.

12.4.19. Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιει: (α) $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ και (β) η ακολουθια των μερικων αθροισματων $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φραγμενη, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.20. Αν η θετικη $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιει: $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.21. Αν η θετικη $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιει: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, τοτε $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.22. Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα και η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει, τοτε $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.23. Αν οι θετικες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιουν: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$ τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n < \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.24. Γενικευσε το παραπανω για ακολουθιες οι οποιες εχουν και αρνητικους ορους.

12.4.25. Αν οι θετικες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιουν: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty$ τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n = \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.26. Εστω οι $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$\forall n : g_n = f_{2n-1} + f_{2n}.$$

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ συγκλινει, το ιδιο θα ισχυει για την $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.27. Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με όρους μη αρνητικούς. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{f_n}}{n} < \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.28. Αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι εναλασσουσα και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.29. Αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι εναλασσουσα και η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.30. Αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει και $\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{f_n} = 1$, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

12.4.31. Δίνεται *γνησίως φθίνουσα* ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με όρους μη αρνητικούς. Αποδειξε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ τότε και $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$.

12.4.32. Για ποιές τιμές του ϑ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\vartheta)$;

12.4.33. Αποδειξε οτι

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\dots .$$

12.4.34. Βρες μια $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ της οποιας η συγκλιση μπορει να αποδεχιθει με το κριτηριο ριζας αλλα οχι με το κριτηριο λογου.

12.4.35. Εστω ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοιες ώστε

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots < \infty, \qquad g_1^2 + g_2^2 + \ldots < \infty.$$

Αποδειξε οτι

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots \leq \left(f_1^2 + f_2^2 + \ldots\right)\left(g_1^2 + g_2^2 + \ldots\right).$$

Ποτε ισχυει η ισοτητα;

12.4.36. Εστω $p, q \in [1, \infty]$ τετοια ωστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Εστω επισης ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοιες ώστε

$$f_1^p + f_2^p + \ldots < \infty, \qquad g_1^q + g_2^q + \ldots < \infty.$$

Αποδειξε οτι

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots \leq \left(f_1^p + f_2^p + \ldots\right)^{1/p}\left(g_1^q + g_2^q + \ldots\right)^{1/q}.$$

Ποτε ισχυει η ισοτητα;

12.4.37. Εστω $p \in [1, \infty]$. Εστω επισης ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοιες ώστε

$$f_1^p + f_2^p + \ldots < \infty, \qquad g_1^p + g_2^p + \ldots < \infty.$$

Αποδειξε οτι

$$(f_1 + g_1)^p + (f_2 + g_2)^p + \ldots \leq \left(f_1^p + f_2^p + \ldots\right)^{1/p} + \left(g_1^p + g_2^p + \ldots\right)^{1/p}.$$

Ποτε ισχυει η ισοτητα;

12.4.38. Δινεται μη αρνητικη ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και οριζουμε την $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$g_n = (-1)^n f_n.$$

Αποδειξε οτι: αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει και η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ δεν συγκλινει, τοτε μπορουμε να αναδιαταξουμε τους ορους της $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ετσι ωστε το αθροισμα των να ισουται με *οποιοδηποτε* αριθμο $c \in \mathbb{R}$.

12.4.39. Ας θεωρησουμε καθε ακολουθια $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots)$ ως ενα *διανυσμα* με *μετρο*

$$\|\mathbf{f}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\right)^{1/2}.$$

Αποδειξε οτι το συνολο των ακολουθιων

$$\mathcal{F}_2 = \{\mathbf{f} : \|\mathbf{f}\|_2 < \infty\}$$

ειναι ενας *διανυσματικος* χωρος. Τι διανυσματικες ιδιοτητες μπορεις να αποδειξεις για τον $\mathcal{F}_2$ και τα στοιχεια του;

12.4.40. Επαναλαβε το προηγουμενο οταν το μετρο οριζεται ως

$$\|\mathbf{f}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p\right)^{1/p}$$

για τυχον $p \in (0, \infty]$.

Κεφάλαιο 13

Δυναμοσειρες

Μια δυναμοσειρα ειναι ενα πολυωνυμο *απειρης* ταξης. Καθε συναρτηση $f(x)$ που εχει φραγμενες παραγωγους ολων των ταξεων μπορει να γραφτει σαν δυναμοσειρα (σειρα *Taylor* και σειρα *McLaurin*). Επιπλεον, αν κρατησουμε τους ορους μιας τετοιας σειρας μεχρι την N-στη δυναμη, τοτε παιρνουμε μια *προσεγγιση* της $f(x)$ απο ενα πολυωνυμο $f_N(x)$ (ταξεως N). Οι τιμες του πολυωνυμου μπορουν να υπολογιστουν χρησιμοποιωντας μονο «απλες» αριθμητικες πραξεις (προσθεση και πολλαπλασιασμο)· ετσι μπορουμε να προσεγγισουμε την τιμη μιας υπερβατικης συναρτηση (π.χ. του e^x) μονο με προσθεσεις και πολλαπλασιασμους.

13.1 Θεωρια και Παραδειγματα

13.1.1. Ορισμος: *Δυναμοσειρα* ειναι μια *συναρτηση* της μορφης

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n \tag{13.1}$$

όπου η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι μια αριθμητική ακολουθία.

13.1.2. Παραδειγμα: Δυο δυναμοσειρες ειναι οι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x-1)^n = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^2 + \ldots$$

13.1.3. Παρατηρηση: Ο Ορισμος 13.1.1 ειναι «φορμαλιστικος». Δηλ. γραφουμε την σειρα (13.1) χωρις να εξετασουμε αν αυτη συγκλινει ή οχι. Εστω οτι υπαρχει ενα συνολο A τιμων του x (το *συνολο συγκλισης*) για τις οποιες η (13.1) συγκλινει σε πραγματικο αριθμο. Αυτος γενικα θα εξαρταται απο το x. Ετσι οριζεται μια συναρτηση $f : A \to \mathbb{R}$:

$$\forall x \in A : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Γεννιεται τωρα το ερωτημα: *για μια συγκεκριμενη $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ποιο ειναι το συνολο συγκλισης A;*

13.1.4. Θεωρημα: Καθε δυναμοσειρα $\sum_{n=0}^{\infty} f_n (x - x_0)^n$ εχει μια *ακτινα συγκλισης* $R > 0$ τετοια ωστε

$$\begin{aligned} |x - x_0| < R &\Rightarrow \text{ η δυναμοσειρα συγκλινει απολυτως,} \\ |x - x_0| > R &\Rightarrow \text{ η δυναμοσειρα δεν συγκλινει.} \end{aligned}$$

13.1.5. Παρατηρηση: Παρατηρειστε οτι το Θεωρημα 13.1.4 δεν λεει τι συμβαινει οταν $|x - x_0| = R$. Αυτο θα πρεπει να το εξακριβωνουμε κατα περιπτωση.

13.1.6. Παραδειγμα: Εστω

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots .$$

Εχουμε δει στο Κεφαλαιο 12 οτι

$$\forall x \in (-1, 1) : \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

και

$$\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) : \text{η } 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ δεν συγκλινει.}$$

Αρα οταν $(f_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, 1, \dots)$ η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ εχει ακτινα συγκλισης $R = 1$ και *διαστημα συγκλισης* το $(-1, 1)$. Μπορουμε να γραψουμε

$$\forall x \in (-1, 1) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

οπου $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

13.1.7. Παραδειγμα: Εστω

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots .$$

Για να βρουμε την ακτινα συγκλισης της σειρας χρησιμοποιουμε το Κριτηριο του Λογου. Εχουμε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} \right|}{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} |x| = |x| .$$

Βλεπουμε οτι η

$$\begin{aligned} |x| < 1 &\Rightarrow \text{ η } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ συγκλινει,} \\ |x| > 1 &\Rightarrow \text{ η } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ αποκλινει.} \end{aligned}$$

Αρα η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 1$. Ποιο ειναι το διαστημα συγκλισης; Σιγουρα περιεχει το $(-1, 1)$. Επισης, οταν $x = 1$ η σειρα γινεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

που ξερουμε οτι συγκλινει. Παρομοια, οταν $x = -1$ η σειρα γινεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = -\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - ...\right)$$

που ξερουμε οτι συγκλινει. Αρα τελικα το διαστημα συγκλισης ειναι $[-1, 1]$.Μπορουμε να γραψουμε

$$\forall x \in [-1, 1] : g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

13.1.8. Θεωρημα: Αν η δυναμοσειρα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n$$

εχει ακτινα συγκλισης R τοτε, για καθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, ισχυουν τα εξης:

1. η $f(x)$ ειναι συνεχης,
2. $\frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$,
3. $\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$,
4. $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \int_a^b (x - x_0)^n\, dx$.

13.1.9. Παρατηρηση: Τα μερη 2, 3 και 4 του Θεωρηματος 13.1.8 λενε οτι στο εσωτερικο του διαστηματος συγκλισης μπορω να παραγωγισω και να ολοκληρωσω την δυναμοσειρα ορο-προς-ορο.

13.1.10. Θεωρημα: Έστω οτι

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot (x - x_0)^n .$$

Τοτε

$$\forall n \geq 0 : f_n = g_n.$$

13.1.11. Πορισμα: Μια συναρτηση $f(x)$ εχει το πολυ μια αναπαρασταση ως δυναμοσειρα στο διαστημα $(-R, R)$.

13.1.12. Παραδειγμα: Ειδαμε οτι

$$\forall x \in (-1,1) : \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Τοτε εχουμε

$$\forall x \in (-1,1) : \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1},$$
$$\forall x \in (-1,1) : \int \frac{1}{1-x} dx = \ln \frac{1}{|1-x|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

13.1.13. Θεωρημα (Σειρα MacLaurin): Αν μία συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά του x με ακτινα συγκλισης $R > 0$, τότε αυτή έχει την μορφή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{13.2}$$

Αποδειξη: Ας υποθεσουμε οτι η $f(x)$ μπορει να αναπτυχθει σε δυναμοσειρα. Τοτε η $f(x)$ και οι παραγωγοι αυτης θα δινονται απο τις σχεσεις

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots \\ f'(x) &= f_1 + 2 f_2 x + 3 f_3 x^2 + \ldots \\ f''(x) &= 2 f_2 + 3 \cdot 2 \cdot f_3 x + \ldots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot f_3 + \ldots \\ &\ldots \end{aligned} \tag{13.3}$$

Ολες οι παραπανω θα ισχυουν στο $(-R, R)$. Οποτε μπορουμε να θεσουμε $x = 0$ και να παρουμε

$$\begin{aligned} f(0) &= 0! f_0 \\ f'(0) &= 1! f_1 \\ f''(0) &= 2! f_2 \\ f'''(0) &= 3! f_3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Λυνοντας τις παραπανω παιρνουμε

$$f_0 = \frac{f(0)}{0!}, \quad f_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad f_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad f_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \ldots$$

και αντικαθιστωντας στην (13.3) παιρνουμε

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

13.1.14. Παραδειγμα: Εστω $f(x) = e^x$. Τοτε

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= e^x \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= e^x \Rightarrow f''(0) = 1 \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \end{aligned}$$

δηλ. παιρνουμε τον τυπο του Κεφαλαιου 3 για το e^x. Για να ισχυει ο τυπος πρεπει να συγκλινει η σειρα· αυτο το ελεγχουμε με το Κριτηριο του Λογου. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} < 1.$$

Αλλα $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$. Δηλ. η σειρα συγκλινει στο $(-\infty, \infty)$ ή με αλλα λογια η ακτινα συγκλισης ειναι $R = \infty$.

13.1.15. Παραδειγμα: Εστω $f(x) = \cos x$. Τοτε

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(0) = 1 \\ f^{(3)}(x) &= \sin x \Rightarrow f''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \Rightarrow f''(0) = 1 \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \\ &= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

δηλ. παιρνουμε τον τυπο του Κεφαλαιου 4 για το $\cos x$. Για να ισχυει ο τυπος πρεπει να συγκλινει η σειρα· αυτο το ελεγχουμε με το Κριτηριο του Λογου. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)}/(2n+2)!}{x^{2n}/(2n)!} \right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} < 1.$$

Αλλα $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$. Δηλ. η σειρα συγκλινει στο $(-\infty, \infty)$ ή με αλλα λογια η ακτινα συγκλισης ειναι $R = \infty$.

13.1.16. Παρατηρηση : Δινονται παρακατω μερικες αξιοσημειωτες σειρες *MacLaurin* (τις οποιες καλο θα ειναι να *απομνημονευσεις*).

$\forall x \in (-1,1): \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$\forall x \in (-\infty,\infty): e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$

$\forall x \in (-\infty,\infty): \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots$

$\forall x \in (-\infty,\infty): \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots$

$\forall x \in (-\infty,\infty): \ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dots$

$\forall x \in (-1,1): \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4 + \dots$

$\forall x \in (-1,1): (1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dfrac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dfrac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}x^4 + \dots$

13.1.17. Θεωρημα (Σειρα Taylor): Αν μία συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά του $x - x_0$ με ακτινα συγκλισης $R > 0$, τότε αυτή έχει την μορφή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \tag{13.4}$$

Αποδειξη: Η αποδειξη ειναι παρομοια με αυτη του Θεωρηματος 13.1.11.

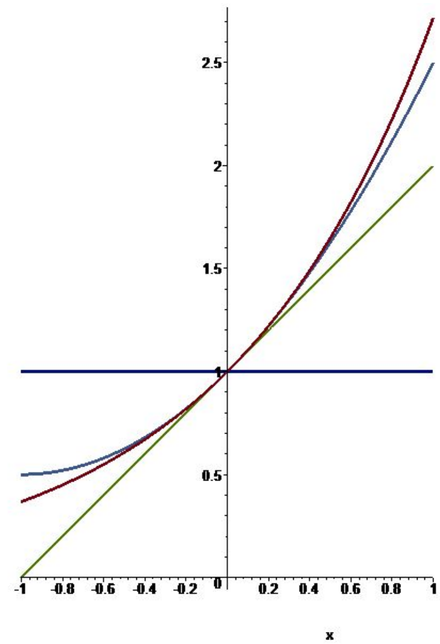
13.1.18. Παρατηρηση: Ενα σημαντικο (αλλα οχι το μοναδικο) κινητρο για την χρηση δυναμοσειρων (και ιδιαιτερως σειρων *Taylor*) ειναι η υπολογιστικη ευκολια. Μπορουμε να θεωρησουμε μια δυναμοσειρα ως ενα *πολυωνυμο απειρης ταξης*. Σε αντιθεση με την εκθετικη, λογαριθμικη και αλλες *υπερβατικες* συναρτησεις, οι τιμες ενος πολυωνυμου μπορουν να υπολογιστουν με απλες αριθμητικες πραξεις. Θεωρησε την εκθετικη συναρτηση

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots . \tag{13.5}$$

Για να υπολογισουμε μια συγκεκριμενη τιμη e^{x_1} *ακριβως* πρεπει να υπολογισουμε το απειρο αθροισμα της (13.5). Φυσικα αυτο ειναι αδυνατο. Αλλα μπορουμε να *προσεγγισουμε* την τιμη e^{x_1} χρησιμοποιωντας ενα πεπερασμενο αριθμο ορων της (13.5). Στον παρακατω πινακα δινουμε τις τιμες των $f(x) = e^x$, $f_{(0)}(x) = 1$, $f_{(1)}(x) = 1 + x$, $f_{(2)}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, για τις τιμες $x = 0$, 0.1, 0.5, 1.0.

x	0.000	0.100	0.500	1.000
$f_{(0)}(x) = 1$	1.000	1.000	1.000	1.000
$f_{(1)}(x) = 1 + x$	1.000	1.100	1.500	2.000
$f_{(2)}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$	1.000	1.105	1.625	2.500
$f(x) = e^x$	1.000	1.105	1.649	2.719

Παρατηρουμε οτι οσο υψηλοτερης ταξης προσεγγισης N παιρνουμε, τοσο μικροτερη γινεται η διαφορα μεταξυ της $f(x)$ και της $f_{(N)}(x)$. Απο την αλλη πλευρα, οσο μεγαλυτερο γινεται το x, τοσο μεγαλυτερη γινεται η διαφορα. Παρομοια πραγματα μπορουμε να δουμε στο Σχημα, 13.1 οπου δινονται οι γραφικες παραστασεις των $f(x)$, $f_{(0)}(x)$, $f_{(1)}(x)$, $f_{(2)}(x)$.



Σχ.13.1: Προσεγγιση της e^x με σειρα *MacLaurin*.

13.1.19. Παρατηρηση: Βλεπουμε λοιπον οτι οσο μεγαλυτερης ταξης προσεγγιση χρησιμοποιουμε, τοσο πλησιεστερα βρισκεται η αντιστοιχη καμπυλη σε αυτη της $f(x)$, αλλα επισης οτι οι καμπυλες αποκλινουν οσο μεγαλωνει η τιμη του $|x|$. Τα επομενα θεωρηματα διατυπωνουν αυτη την παρατηρηση με ακριβεια.

13.1.20. Θεωρημα: Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο διάστημα $(-R, R)$ τότε

$$\forall x \in (-R, R), \forall n \geq 0 : f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

όπου $\xi \in (-R, R)$. Ομοιως, αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$, τότε

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R), \forall n \geq 0 : f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n\right) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}$$

όπου $\xi \in (-R, R)$.

13.1.21. Θεωρημα: Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα διάστημα $(-R, R)$ και ότι υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε

$$\forall x \in (-R, R), \forall n \geq 0 : \left|f^{(n)}(x)\right| < M^n.$$

Τότε

$$\forall x \in (-R, R) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Ομοίως, έστω ότι η $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ και ότι υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R), \forall n \geq 0 : \left| f^{(n)}(x) \right| < M^n.$$

Τότε

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x - x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

13.1.22. Παρατηρηση: Προσεξε ότι τα Θεωρήματα 13.1.13, 13.1.17 λένε: *εάν* η $f(x)$ έχει σειρά *MacLaurin* (αντ. *Taylor*) τότε αυτή δίνεται από την (13.2) (αντ. (13.4)). Ενώ το Θεώρημα 13.1.21 δίνει *ικανές συνθήκες* για να έχει η $f(x)$ σειρά *MacLaurin* ή *Taylor*.

13.1.23. Ασκηση: Μεχρι ποιας ταξης οροι απαιτουνται στην σειρα *McLaurin* της $f(x) = \frac{1}{1-x}$ για να βρουμε την τιμη $f(0.6)$ με σφαλμα μικροτερο απο 0.001;
Λύση. Το σφαλμα θα ειναι μικροτερο κατ' απολυτο τιμη απο τον πρωτο ορο που παραλειπεται (γιατι;). Δηλ. θα πρεπει να εχουμε

$$(0.6)^n < 0.001 \Rightarrow n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.6} = 13.523 \Rightarrow n \geq 14.$$

Πραγματι,

$$\frac{1}{1 - 0.6} = 2.5000, \qquad \sum_{n=0}^{15} (0.6)^n = 2.4992$$

και

$$\left| \frac{1}{1 - 0.6} - \sum_{n=0}^{15} (0.6)^n \right| = |2.5000 - 2.4992| = 8 \cdot 10^{-4} < 0.001.$$

13.1.24. Ασκηση: Μεχρι ποιας ταξης οροι απαιτουνται στην σειρα *McLaurin* της $f(x) = \cos x$ για να βρουμε την τιμη $f(1)$ με σφαλμα μικροτερο απο 0.001;
Λύση. Το σφαλμα θα ειναι μικροτερο κατ' απολυτο τιμη απο τον πρωτο ορο που παραλειπεται. Δηλ. θα πρεπει να εχουμε

$$\frac{1}{n!} < 0.001 \Rightarrow n! > 1000.$$

Επειδη $6! = 720$, $7! = 5040$, πρεπει να παρουμε ορους μεχρι και 6ης ταξης. Πραγματι

$$\cos 1 = 0.5403, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = 0.54028$$

και

$$\left| \cos 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \right) \right| = |0.54030 - 0.54028| = 2 \cdot 10^{-5} < 0.001.$$

13.1.25. Παρατηρηση: Τα παρακατω παραδειγματα δινουν διαφορους τροπους για την αναπτυξη μιας συναρτησης σε δυναμοσειρα.

13.1.26. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1+x)^3} \Rightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{-3}{(1+x)^4} \Rightarrow f'(0) = -3 \\
f''(x) &= \frac{12}{(1+x)^5} \Rightarrow f''(0) = 12 \\
&\text{κ.τ.λ.}
\end{aligned}
$$

οποτε

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \dots .$$

13.1.27. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = e^{x^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Αντι να χρησιμοποιησουμε το ορισμο της σειρας *Taylor*, ο οποιος απαιτει πολλες παραγωγισεις, δουλευουμε ως εξης: παιρνουμε την (γνωστη) σειρα της e^z και οπου z θετουμε $z = x^2$. Δηλ. εχουμε

$$
\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots \Rightarrow \\
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \dots
\end{aligned}
$$

13.1.28. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \Rightarrow \\
\frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots
\end{aligned}
$$

13.1.29. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{1+x}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \Rightarrow \\
\frac{1}{1-(-x)} &= 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots = 1 - x + +x^2 - x^3 + \dots .
\end{aligned}
$$

13.1.30. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{4-x}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \Rightarrow \\
\frac{1}{4-x} &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{64} + \dots\right) = \frac{1}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{256} + \dots
\end{aligned}
$$

13.1.31. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευουμε ως εξης. Γνωριζουμε οτι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots .$$

Οποτε

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x} &= (1+x)\left(1+x+x^2+\dots\right)\\ &= \left(1+x+x^2+\dots\right) + x\left(1+x+x^2+\dots\right)\\ &= \left(1+x+x^2+\dots\right) + \left(x+x^2+x^3+\dots\right)\\ &= 1+2x+2x^2+2x^3+\dots .\end{aligned}$$

13.1.32. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^3}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευουμε ως εξης:

$$\begin{aligned}\frac{1+x^2}{1-x^3} &= \left(1+x^2\right)\left(1+x^3+x^6+\dots\right)\\ &= \left(1+x^3+x^6+\dots\right) + x^2\left(1+x^3+x^6+\dots\right)\\ &= \left(1+x^3+x^6+\dots\right) + \left(x^2+x^5+x^8+\dots\right)\\ &= 1+x+x^2+x^3+x^5+x^6+x^8+x^9+\dots .\end{aligned}$$

13.1.33. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = e^x \sin x$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Εδω εχουμε

$$\begin{aligned}e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\end{aligned}$$

Τοτε θα ισχυει και

$$e^x \sin x = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right).$$

Τωρα θελουμε να εκτελεσουμε τον πολλαπλασιασμο δυο πολυωνυμων *απειρης ταξης*. Αυτο μπορει να γινει με την βοηθεια του παρακατω πινακα

	1	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^4}{24}$	...
0	0	0	0	0	0	...
x	x	x^2	$\frac{x^3}{2}$	$\frac{x^4}{6}$	$\frac{x^5}{24}$	...
0	0	0	0	0	0	...
$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^4}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$-\frac{x^6}{36}$	$-\frac{x^7}{144}$	...
0	0	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...

Τωρα, προσθετοντας στα στοιχεια κατα μηκος των *αντιδιαγωνιων* παιρνουμε

$$\begin{aligned}
&\text{οροι 0ης ταξης} : 0\\
&\text{οροι 1ης ταξης} : 0 + x = x\\
&\text{οροι 2ης ταξης} : 0 + x^2 + 0 = x^2\\
&\text{οροι 3ης ταξης} : 0 + \frac{x^3}{2} + 0 - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}\\
&\text{οροι 4ης ταξης} : 0 + \frac{x^4}{6} + 0 - \frac{x^4}{6} = 0
\end{aligned}$$

Οποτε βλεπουμε οτι οι οροι μεχρι και 3ης ταξης ειναι

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots .$$

13.1.34. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Παρομοια με την προηγουμενη εχουμε

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\\
\frac{1}{x+1} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots
\end{aligned}$$

και

$$\frac{\sin x}{x+1} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right).$$

Ο αντιστοιχος πινακας ειναι

	0	x	0	$-\frac{x^3}{6}$	0	...
1	0	x	0	$-\frac{x^3}{6}$	0	...
$-x$	0	$-x^2$	0	$\frac{x^4}{6}$	0	...
x^2	0	x^3	0	$-\frac{x^5}{6}$	0	...
$-x^3$	0	$-x^4$	0	$\frac{x^6}{6}$	0	...
x^4	0	x^5	0	$-\frac{x^7}{6}$	0	...
...	...	...	...	...	...	...

Τωρα, προσθετοντας στα στοιχεια κατα μηκος των *αντιδιαγωνιων* παιρνουμε

$$\begin{aligned}
&\text{οροι 0ης ταξης} : 0\\
&\text{οροι 1ης ταξης} : x + 0 = x\\
&\text{οροι 2ης ταξης} : 0 - x^2 + 0 = -x^2\\
&\text{οροι 3ης ταξης} : -\frac{x^3}{6} + 0 + x^3 + 0 = \frac{5x^3}{6}\\
&\text{οροι 4ης ταξης} : 0 + \frac{x^4}{6} + 0 - x^4 + 0 = -\frac{5x^4}{6}
\end{aligned}$$

Οποτε βλεπουμε οτι οι οροι μεχρι και 3ης ταξης ειναι

$$\frac{\sin x}{x+1} = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + \dots .$$

13.1.35. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(1 + x + x^2 + ...\right)' \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots .\end{aligned}$$

13.1.36. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}.$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \left(1 + x^2 + x^4 + ...\right) dx \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots .\end{aligned}$$

13.1.37. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = x^2 + 2x + 1$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= 2x + 2 \Rightarrow f'(0) = 2 \\ f''(x) &= 2 \Rightarrow f''(0) = 2 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \text{ για καθε } n \geq 3\end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x) = 1 + 2 \cdot x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + 2x + x^2$$

δηλ. την αρχικη συναρτηση. Αυτο δεν ειναι απροσδοκητο: η αρχικη συναρτηση ηταν ηδη πολυωνυμο και αρα η σειρα *Taylor* δεν θα εισαγει πολυωνυμικους ορους ανωτερης ταξης απο αυτους που ηδη υπαρχουν· οι δε συντελεστες θα ειναι ιδιοι με τους αρχικους.

13.1.38. Ασκηση: Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = x^2 + 2x + 1$ γυρω απο το $x_0 = 2$.
Λύση. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(2) = 9 \\ f'(x) &= 2x + 2 \Rightarrow f'(2) = 6 \\ f''(x) &= 2 \Rightarrow f''(2) = 2 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \text{ για καθε } n \geq 3\end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x) = 9 + 6 \cdot (x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^2 .$$

Αν κανεις τις πραξεις θα δεις οτι οντως

$$9 + 6 \cdot (x-2) + (x-2)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Η σειρα γυρω απο το $x_0 = 2$ ειναι και παλι πολυωνυμο 2ης ταξης (οπως η αρχικη συναρτηση) αλλα εκφρασμενη σε δυναμεις του $(x-2)$, οχι του x!

13.2 Λυμενα Προβληματα

13.2.1. Βρες την ακτινα συγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots .$$

Λύση. Με το κριτηριο λογου

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x| .$$

Αρα η σειρα συγκλινει για $|x| < 1$ και δεν συγκλινει για $|x| > 1$. Η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 1$.

13.2.2. Βρες την ακτινα συγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.
Λύση. Με το κριτηριο λογου

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| = \begin{cases} 0 & \text{οταν } x = 0 \\ \infty & \text{οταν } x \neq 0 \end{cases} .$$

Αρα η σειρα συγκλινει για $x = 0$ και δεν συγκλινει για $x \neq 0$. Η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 0$.

13.2.3. Βρες την ακτινα συγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.
Λύση. Με το κριτηριο λογου

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} x^{n+1}}{\frac{(n!)^2}{(2n!)} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} x \right| = \frac{|x|}{4}.$$

Αρα η σειρα συγκλινει για $\frac{|x|}{4} < 1$ και δεν συγκλινει για $\frac{|x|}{4} > 1$. Η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 4$.

13.2.4. Δειξε αριθμητικα και με γραφικη παρασταση την προσεγγιση της

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots .$$

Λύση. Θα χρησιμοποιησουμε προσεγγιση 0ης, 2ης και 4ης ταξης. Οριζουμε

$$f_{(0)}(x) = 1$$

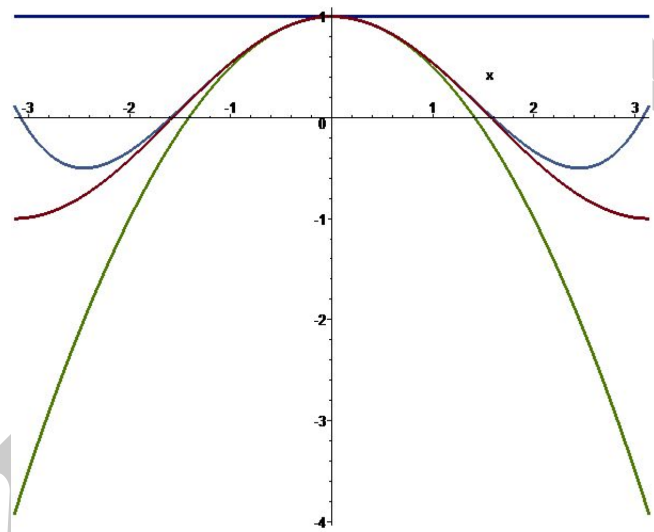
$$f_{(2)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$f_{(4)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Η αριθμητικη προσεγγιση φαινεται στον παρακατω πινακα, για τις τιμες $x = 0,\ 0.1,\ 0.5,\ 1.0$.

x	0.000	0.100	0.500	1.000
$f_{(0)}(x) = 1$	1.000	1.000	1.000	1.000
$f_{(2)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$	1.000	0.995	0.877	0.500
$f_{(4)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$	1.000	0.995	0.877	0.541
$f(x) = \cos x$	1.000	0.995	0.877	0.540

Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχημα, 13.2.



Σχ.13.2: Προσεγγιση της $\cos x$ με σειρα *MacLaurin*.

13.2.5. Μεχρι ποιας ταξης οροι απαιτουνται στην σειρα *McLaurin* της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για να βρουμε την τιμη $f(0.5)$ με σφαλμα μικροτερο απο 0.001;
Λύση. Το σφαλμα θα ειναι μικροτερο κατ' απολυτο τιμη απο τον πρωτο ορο που παραλειπεται (γιατι;). Δηλ. θα πρεπει να εχουμε

$$(0.5)^n < 0.001 \Rightarrow n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.5} = 9.965 \Rightarrow n \geq 10.$$

Πραγματι

$$\frac{1}{1+(0.5)^2} = 0.8000, \qquad 1 - (0.5)^2 + (0.5)^4 - (0.5)^8 + (0.5)^{10} = 0.809$$

και

$$\left|\frac{1}{1+(0.5)^2} - \left(1 - (0.5)^2 + (0.5)^4 - (0.5)^8 + (0.5)^{10}\right)\right| = |0.800 - 0.809| < 0.001.$$

13.2.6. Υπολογισε την τιμη του $\frac{1}{e}$ με ακριβεια δυο δεκαδικων.
Λύση. Εχουμε

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots$$
$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots .$$

Αρκει να βρουμε το μικροτερο n τετοιο ωστε $\frac{1}{n!} < 0.01$. Εχουμε

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 4.166 \times 10^{-2},$$
$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 8.333 \times 10^{-3}.$$

Αρα θα λαβουμε

$$\frac{1}{e} \simeq 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = 0.366.$$

13.2.7. Υπολογισε την τιμη του $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^3} dx$ με ακριβεια δυο δεκαδικων.
Λύση. Εχουμε

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots .$$

Οποτε

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^3} dx = \int_0^{1/2} \left(1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{10} + \ldots .$$

Αρκει να βρουμε το μικροτερο n τετοιο ωστε $\frac{1}{n2^n} < 0.01$. Εχουμε

$$\frac{1}{4 \cdot 2^4} = 1.5625 \times 10^{-2},$$
$$\frac{1}{7 \cdot 2^7} = 1.1161 \times 10^{-3}.$$

Αρα θα λαβουμε

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^3} dx \simeq \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} = 0.48549 .$$

13.2.8. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Εχουμε

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'(0) = -2$$
$$f''(x) = \frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f''(0) = 6$$

κ.τ.λ.

οποτε

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \dots .$$

13.2.9. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \sqrt{1+x}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/2} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \Rightarrow f''(0) = \frac{3}{8} \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots .$$

13.2.10. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \cos(x^2)$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Παιρνουμε την (γνωστη) σειρα της $\cos z$ και οπου z θετουμε $z = x^2$. Εχουμε

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots \Rightarrow \\ \cos\left(x^2\right) &= 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + \dots \end{aligned}$$

13.2.11. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \Rightarrow \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \end{aligned}$$

13.2.12. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{3+x}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \Rightarrow \\ \frac{1}{3+x} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \dots\right) = \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} - \dots . \end{aligned}$$

13.2.13. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευουμε ως εξης. Γνωριζουμε οτι

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots .$$

Οποτε

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1+x} &= (1-x)\left(1-x+x^2+\ldots\right)\\ &= \left(1-x+x^2+\ldots\right)-x\left(1-x+x^2+\ldots\right)\\ &= 1-2x+2x^2-2x^3+2x^4-2x^5+\ldots\,.\end{aligned}$$

13.2.14. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x)=e^x\ln(1+x)$ γυρω απο το $x_0=0$.
Λύση. Εδω εχουμε

$$\begin{aligned}e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\\ \ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\ldots\end{aligned}$$

Τοτε θα ισχυει και

$$e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\ldots\right).$$

Ο πινακας του πολλαπλασιασμου ειναι

	1	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^4}{24}$	...
0	0	0	0	0	0	...
x	x	x^2	$\frac{x^3}{2}$	$\frac{x^4}{6}$	$\frac{x^5}{24}$	...
$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^3}{2}$	$-\frac{x^4}{4}$	$-\frac{x^5}{12}$	$-\frac{x^6}{48}$	...
$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{3}$	$\frac{x^5}{6}$	$\frac{x^6}{18}$	$\frac{x^7}{72}$	...
$-\frac{x^4}{4}$	$-\frac{x^4}{4}$	$-\frac{x^5}{4}$	$-\frac{x^6}{8}$	$-\frac{x^7}{24}$	$-\frac{x^8}{96}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Τωρα, προσθετοντας στα στοιχεια κατα μηκος των *αντιδιαγωνιων* παιρνουμε

$$\begin{aligned}&\text{οροι 0ης ταξης}: 0\\ &\text{οροι 1ης ταξης}: 0+x=x\\ &\text{οροι 2ης ταξης}: 0+x^2-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\\ &\text{οροι 3ης ταξης}: 0+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\\ &\text{οροι 4ης ταξης}: 0+\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{4}=0\end{aligned}$$

Οποτε βλεπουμε οτι οι οροι μεχρι και 3ης ταξης ειναι

$$e^x\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x^3+\ldots\,.$$

13.2.15. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{4x}{1+2x-3x^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Εχουμε

$$\frac{4x}{1+2x-3x^2} = \frac{4x}{(1-x)(1+3x)}.$$

Με διασπαση σε απλα κλασματα παιρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{4x}{(1-x)(1+3x)} &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-3x} \\ &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) + \left(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots\right) \\ &= 2 + 4x + 10x^2 + 28x^3 + \dots .\end{aligned}$$

Η ακτινα συγκλισης της σειρας ειναι $R = \frac{1}{3}$ (γιατι;).

13.2.16. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} &\Rightarrow \\ \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 &= -\left(\frac{1}{x+1}\right)'.\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2} &= -\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\left(1 - x + x^2 - x^3 + \dots\right)' \\ &= 1 - 2x + 3x^2 + \dots\end{aligned}$$

13.2.17. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \arctan x$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan x = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \left(1 - x^2 + x^4 - \dots\right) dx \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\end{aligned}$$

13.2.18. Υπολογισε το αθροισμα

$$f(x) = \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots .$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots\right)' \\ &= \left(\frac{x^2}{1 \cdot 2}\right)' - \left(\frac{x^3}{2 \cdot 3}\right)' + \left(\frac{x^4}{3 \cdot 4}\right)' + \dots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \ln(1+x)\end{aligned}$$

Οπότε

$$f(x) = \int \ln(1+x)\,dx = (1+x)\ln(1+x) - x.$$

13.2.19. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = 2x^2 + x + 5$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λύση. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 + x + 5 \Rightarrow f(0) = 5 \\
f'(x) &= 4x + 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= 4 \Rightarrow f''(0) = 4 \\
f^{(n)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \text{ για καθε } n \geq 3.
\end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x) = 5 + 1 \cdot x + \frac{4}{2!}x^2 = 5 + x + 2x^2.$$

13.2.20. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = 2x^2 + x + 5$ γυρω απο το $x_0 = 1$.
Λύση. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 + x + 5 \Rightarrow f(1) = 8 \\
f'(x) &= 4x + 1 \Rightarrow f'(1) = 5 \\
f''(x) &= 4 \Rightarrow f''(0) = 4 \\
f^{(n)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \text{ για καθε } n \geq 3.
\end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x) = 8 + 5 \cdot (x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2.$$

Αν κανεις τις πραξεις θα δεις οτι οντως

$$8 + 5 \cdot (x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 = 2x^2 + x + 5.$$

Η σειρα γυρω απο το $x_0 = 1$ ειναι και παλι πολυωνυμο 2ης ταξης (οπως η αρχικη συναρτηση) αλλα εκφρασμενη σε δυναμεις του $(x-1)$.

13.2.21. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \cos x$ γυρω απο το $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \dots .
\end{aligned}$$

13.2.22. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = \sqrt{x}$ γυρω απο το $x_0 = 2$.
Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \sqrt{2 + (x-2)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x-2}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x-2}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \dots\right) \\
&= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \dots .
\end{aligned}$$

13.2.23. Υπολογισε την σειρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow \\ \arctan 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \Rightarrow \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots . \end{aligned}$$

13.2.24. Υπολογισε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.
Λύση. Εχουμε

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Οποτε εχουμε και $D_x\left(\frac{e^x-1}{x}\right) =$

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right)' \Rightarrow \\ \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} \Rightarrow \\ \frac{1 \cdot e^1 - e^1 + 1}{1^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n1^{n-1}}{(n+1)!} \Rightarrow 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

13.3 Αλυτα Προβληματα

13.3.1. Βρες το διαστημα συγκλισης των παρακατω δυναμοσειρων.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. *Απ.* $(-1, 1)$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/(n^3+1)$. *Απ.* $[-1, 1]$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (x/n)^n$. *Απ.* $(-\infty, \infty)$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(n)\, x^n/n$. *Απ.* $[0, 0]$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$. *Απ.* $(-1, 1]$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n(n+1)$. *Απ.* $[-1, 1]$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty}(nx)^n/n!$. *Απ.* $[-e^{-1}, e)$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$. *Απ.* $[0, 0]$.

13.3.2. Βρες το διαστημα σύγκλισης των παρακατω *σειρων*.

1. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \ldots$. *Απ.* $(-1, 1)$.

2. $\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} + \ldots + \sin\frac{x}{2^n} + \ldots$. *Απ.* $(-\infty, \infty)$.

3. $\sin x + \sin\frac{2x}{2^2} + \ldots + \sin\frac{nx}{n^2} + \ldots$. *Απ.* $(-\infty, \infty)$.

4. $\frac{x}{e^x} + \frac{2x}{e^{2x}} + \ldots + \frac{nx}{e^{nx}} + \ldots$. *Απ.* $[0, \infty)$.

13.3.3. Χρησιμοποιησε σειρα *Taylor* για να βρεις με ακριβεια 2 δεκαδικων την τιμη των παρακατω συναρτησεων.

1. $\sin x$.

2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. $\arctan x$.

4. $\sqrt[3]{1+x}$.

13.3.4. Για τις παρακατω $f(x)$ και x_0, κανε την γραφικη παρασταση της προσεγγιγης n-στης ταξης (για $n = 0, 1, 2$) με σειρα *Taylor*.

1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

2. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.

4. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$.

5. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$.

6. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

13.3.5. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x)$ γυρω απο το x_0.

1. Οταν $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$. *Απ.* $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$.

2. Οταν $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$. *Απ.* $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \ldots$.

3. Οταν $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$. *Απ.* $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots$.

4. Οταν $f(x) = \sin x^2$, $x_0 = 0$. *Απ.* $x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{10} + \ldots$.

5. Οταν $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 0$. *Απ.* $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \ldots$.

6. Οταν $f(x) = x^2 + 2x + 4$, $x_0 = 0$. *Απ.* $4 + 2x + x^2$.
7. Οταν $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$. *Απ.* $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots$.
8. Οταν $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$, $x_0 = 0$. *Απ.* $1 - x^3 + x^6 - \ldots$.
9. Οταν $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $x_0 = 0$. *Απ.* $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \ldots$.
10. Οταν $f(x) = \frac{1}{3+x}$, $x_0 = 0$. *Απ.* $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x^2 - \frac{1}{81}x^3 + \frac{1}{243}x^4 + \ldots$.

13.3.6. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x)$ γυρω απο το x_0.

1. Οταν $f(x) = (x+3)\sin x$, $x_0 = 0$. *Απ.* $3x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \ldots$.
2. Οταν $f(x) = e^x \sin x$, $x_0 = 0$. *Απ.* $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$.
3. Οταν $f(x) = \frac{\sin x}{1+x}$, $x_0 = 0$. *Απ.* $x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + \ldots$.
4. Οταν $f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = 0$. *Απ.* $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \ldots$.

13.3.7. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x)$ γυρω απο το x_0.

1. Οταν $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$.
   Απ. $e + e(x-1) + \left(\frac{1}{2}e\right)(x-1)^2 + \left(\frac{1}{6}e\right)(x-1)^3 + \left(\frac{1}{24}e\right)(x-1)^4 + \ldots$.
2. Οταν $f(x) = x^2 + 2x + 4$, $x_0 = 1$. *Απ.* $7 + 4(x-1) + (x-1)^2$.
3. Οταν $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 2$.
   Απ. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(-2+x) + \frac{1}{27}(-2+x)^2 - \frac{1}{81}(-2+x)^3 + \frac{1}{243}(-2+x)^4 + \ldots$.
4. Οταν $f(x) = \frac{1}{2+x}$, $x_0 = 2$.
   Απ. $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x-2) + \frac{1}{64}(x-2)^2 - \frac{1}{256}(x-2)^3 + \frac{1}{1024}(x-2)^4 + \ldots$.

13.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

Παρακατω δινουμε τις αποδειξεις των θεωρηματων του κεφαλαιου ως μια σειρα προβληματων. Τα προβληματα εξεταζουν την περιπτωση δυναμοσειρας με κεντρο το $x_0 = 0$· τα αποτελεσματα ειναι ευκολο να γενικευθουν για την περιπτωση $x_0 \neq 0$. Για την επιλυση των προβληματων ειναι σημαντικη η κατανοηση της εννοιας της *ομοιομορφης συγκλισης* μιας δυναμοσειρας.

13.4.1. Λεμε οτι: επι του συνολου A η σειρα $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ *συγκλινει ομοιομορφα* στην συναρτηση $f(x)$ ανν για καθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει N_ε *ανεξαρτητο του* ε και τετοιο ωστε

$$\forall x \in A : N \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - \sum_{n=0}^{N} f_n x^n \right| < \varepsilon.$$

Αποδειξε οτι: αν υπαρχει μη αρνητικη $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ τετοια ωστε

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty \text{ και } \forall n \geq 0, \forall x \in A : |f_n x^n| < M_n$$

τοτε

$$\forall x \in A : \sum_{n=0}^{\infty} |f_n x^n| < \infty \text{ και η } \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \textit{ συγκλινει ομοιομορφα.}$$

13.4.2. Αποδειξε οτι: αν η δυναμοσειρα $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ εχει ακτινα συγκλισης R τοτε η συναρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

ειναι συνεχης στο $(-R, R)$.

13.4.3. Αποδειξε οτι: αν η δυναμοσειρα $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ εχει ακτινα συγκλισης R τοτε, για καθε $x \in (-R, R)$ ισχυει

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

13.4.4. Αποδειξε οτι: αν η δυναμοσειρα $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ εχει ακτινα συγκλισης R τοτε, για καθε $x \in (-R, R)$ ισχυει

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

13.4.5. Αποδειξε οτι: αν η δυναμοσειρα $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ εχει ακτινα συγκλισης R τοτε, για καθε $(a, b) \subseteq (-R, R)$ ισχυει

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n x^{n-1}.$$

13.4.6. Αποδειξε οτι: αν οι δυναμοσειρες $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ εχουν ακτινα συγκλισης τουλαχιστον R και η $h(x)$ ειναι συνεχης στο $[-R, R]$, τοτε οι δυναμοσειρες

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n)\, x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f_n - g_n)\, x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(x) f_n x^n$$

συγκλινουν ομοιομορφα στο $(-R, R)$.

13.4.7. Αποδειξε ότι: αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο διάστημα $(-R,R)$ τότε

$$\forall x \in (-R,R), \forall n \geq 0 : f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

όπου $\xi \in (-R,R)$.

Υποδειξη: Χρησιμοποιησε επανειλημμενα το Θεωρημα Μεσης Τιμης.

13.4.8. Αποδειξε ότι: αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο διάστημα $(-R,R)$ και υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε

$$\forall x \in (-R,R), \forall n \geq 0 : \left| f^{(n)}(x) \right| < M^n,$$

τότε

$$\forall x \in (-R,R) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Κεφάλαιο 14

Διαφορικες Εξισωσεις Πρωτης Ταξης

Ο ζητουμενος αγνωστος σε μια διαφορικη εξισωση ειναι μια *συναρτηση*. Συγκεκριμενα, διαφορικη εξισωση πρωτης ταξης ειναι μια εξισωση η οποια συνδεει μια συναρτηση $x(t)$ με την παραγωγο $\frac{dx}{dt}$ και μας δινει πληροφοριες για τον ρυθμο μεταβολης της $x(t)$. Αξιοποιωντας αυτη την πληροφορια, μπορουμε να προσδιορισουμε την αγνωστη συναρτηση $x(t)$. Οι διαφορικες εξισωσεις ειναι ενα απο τα σημαντικοτερα εργαλεια για την μελετη φυσικων και κοινωνικων φαινομενων.

14.1 Θεωρια και Παραδειγματα

14.1.1. Ορισμος: Μια *διαφορική εξίσωση* **(***ΔΕ***)** είναι μια εξίσωση η οποία εμπλέκει μια άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και τις παραγώγους αυτης:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Η *ταξη* της ΔΕ ειναι η υψηλοτερη ταξη παραγωγου που εμφανιζεται σε αυτη.

14.1.2. Παραδειγμα: Η

$$\frac{dy}{dx} - xy^3 + 5x = 0$$

ειναι μια ΔΕ πρωτης ταξης. Η

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin(t)$$

ειναι μια ΔΕ δευτερης ταξης με αγνωστη συναρτηση την $x(t)$ αντι της $y(x)$.

14.1.3. Ορισμος: Μία *λύση* της ΔΕ

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \tag{14.1}$$

ειναι μια συναρτηση $x(t)$ η οποια οταν εισαχθει στην (14.1) την μετατρεπει σε ταυτοτητα. Ακριβεστερα, λεμε οτι η $x(t)$ ειναι *λυση της (14.1) στο σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}$ ανν μετατρεπει την (14.1) σε ταυτοτητα για κάθε $t \in A$.

14.1.4. Παραδειγμα: Καθε συνάρτηση της μορφής $x(t) = ce^t$ ειναι λυση της

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \tag{14.2}$$

στο συνολο $\mathbb{R}$. Διοτι

$$x(t) = ce^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = ce^t$$

οποτε, αντικαθιστωντας την $x(t)$ με ce^t στην (14.2), αυτη μετατρεπεται στην ταυτοτητα

$$ce^t = ce^t.$$

14.1.5. Παραδειγμα: Στο συνολο $\mathbb{R}$, η

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

εχει λυσεις τις $x_1(t) = e^{2t}$ και $x_2(t) = e^{3t}$ καθως και καθε συναρτηση της μορφής $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$ (ελεγξε το).

14.1.6. Παραδειγμα: Στο συνολο $\mathbb{R} - \{0\}$ η

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t^2}$$

εχει την λυση $x(t) = ce^{-\frac{1}{t}}$.

14.1.7. Ορισμος: Μια ΔΕ 1ης ταξης εχει την μορφη

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{14.3}$$

Αν μπορουμε να λυσουμε την (14.3) ως προς $\frac{dx}{dt}$, παιρνουμε την *τυπική μορφή* της ΔΕ 1ης τάξης:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{14.4}$$

Η προσθετη συνθηκη

$$x(t_0) = x_0$$

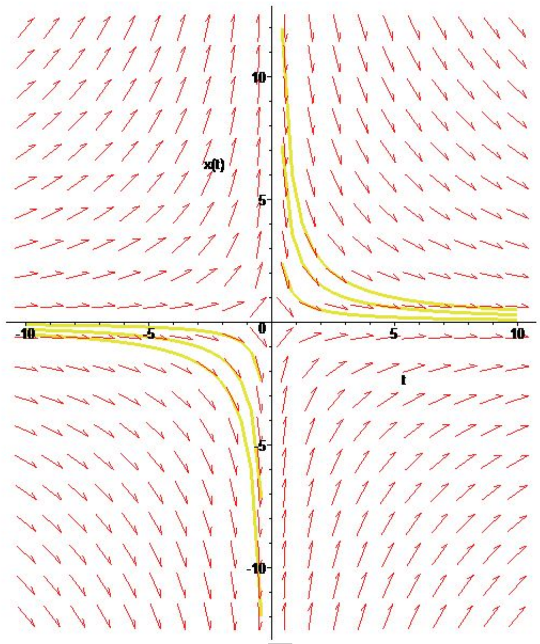
(για καταλληλα t_0, x_0) λεγεται *αρχικη συνθηκη*.

14.1.8. Ορισμος: Η *γενικη λυση* της (14.4) ειναι μια *οικογενεια συναρτησεων* $x(t, c)$ (με παραμετρο c) τετοια ωστε για καθε τιμη $c = c_1$ η $x(t, c_1)$ ικανοποιει την (14.4).

14.1.9. Παραδειγμα: Η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \tag{14.5}$$

εχει γενικη λυση $x(t,c) = \frac{c}{t}$, δηλ. μια οικογενεια υπερβολων, οπως φαινεται στο Σχημα 14.1.



Σχ.14.1: Η οικογενεια των λυσεων της $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t}$.

Η *μοναδικη* λυση της (14.5) η οποια ικανοποιει και την αρχικη συνθηκη $x(2) = 1$ ειναι η $x(t) = \frac{2}{t}$· γεωμετρικα, ειναι η υπερβολη η οποια διερχεται απο το σημειο $(2,1)$. Αυτη η λυση ισχυει για οποιαδηποτε γειτονια $D_R(1,2)$ με $R < 1$ (γιατι;).

14.1.10. Ορισμος: Εστω συναρτηση δυο μεταβλητων $f(x,y)$. Η *μερικη παραγωγος της f ως προς το x* συμβολιζεται με $\frac{\partial f}{\partial x}$ και οριζεται να ειναι η συναρτηση που προκυπτει αν παραγωγισουμε την $f(x,y)$ ως προς το x *θεωρωντας το y* ως σταθερα. Η *μερικη παραγωγος της f ως προς το y* συμβολιζεται με $\frac{\partial f}{\partial y}$ και οριζεται αναλογα.

14.1.11. Παραδειγμα: Η $f(x,y) = x^2 y + x^2 + \sin y$ εχει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \cos y.$$

14.1.12. Θεωρημα (Υπαρξης και Μοναδικοτητας): Εστω ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = t_0. \tag{14.6}$$

Αν υπαρχει αριθμος $R > 0$ τετοιος ωστε η f και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ ειναι συνεχεις για καθε στοιχειο (t,x) του συνολου

$$D_R(t_0,x_0) = \left\{(t,x) : (t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 < R\right\},$$

τοτε υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $x(t)$ η οποια ειναι λυση της (14.6) στο $D_R(t_0,x_0)$.

14.1.13. Παρατηρηση: Ένας εναλλακτικός τρόπος θεώρησης της (14.6) είναι ο εξής. Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

και η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο το Δt γίνεται μικρότερο. Ας επιλέξουμε ένα Δt και ας θέσουμε

$$x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x(t_0 + \Delta t), \quad x_2 = x(t_0 + 2 \cdot \Delta t), \ldots, \quad x_n = x(t_0 + n \cdot \Delta t), \ldots$$

Τότε η (14.6) προσεγγίζεται από μία *αναδρομικη ακολουθια*:

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{ δεδομενο}, \\ \forall n \geq 0 : \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} &= f(n\Delta t, x_n) \end{aligned}$$

η οποια αναλυεται σε ενα *συστημα αλγεβρικων εξισωσεων*:

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{ δεδομενο}, \\ x_1 &= x_0 + f(0, x_0)\Delta t, \\ x_2 &= x_1 + f(\Delta t, x_1)\Delta t, \\ x_3 &= x_2 + f(2\Delta t, x_2)\Delta t, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Μπορουμε να λυσουμε διαδοχικα τις αλγεβρικες εξισωσεις και να προσδιορισουμε την ακολουθια

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

η οποια αποτελει μια *προσεγγιστικη λυση* της (14.6)· περιμενουμε οτι η προσεγγιση θα ειναι τοσο καλυτερη οσο μικροτερο ειναι το Δt (γιατι;).

14.1.14. Ασκηση: Εφαρμοσε την διαδικασια προσεγγιστικης επιλυσης στην ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}, \quad x(2) = 1. \tag{14.7}$$

Λύση. Για οποιοδηποτε Δt εχουμε

$$\begin{aligned} x_0 &= x(2) = 1, \\ x_1 &= x(2 + \Delta t) = x_0 + f(2, x_0)\Delta t = x_0 - \frac{x_0}{2}\Delta t, \\ x_2 &= x(2 + 2\Delta t) = x_1 + f(2 + \Delta t, x_0)\Delta t = x_1 - \frac{x_1}{2 + \Delta t}\Delta t, \\ x_3 &= x(2 + 3\Delta t) = x_2 + f(2 + 2\Delta t, x_0)\Delta t = x_2 - \frac{x_2}{2 + 2\Delta t}\Delta t, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Επιλεγοντας $\Delta t = 0.1$ παιρνουμε

t	2.000	2.100	2.200	2.300	2.400
$x(t)$	1.000	0.950	0.905	0.863	0.826

Επιλεγοντας $\Delta t = 0.02$ παιρνουμε

t	2.000	2.020	2.040	2.060	2.080	2.100
$x(t)$	1.000	0.999	0.980	0.970	0.961	0.951

Η αληθης τιμη $x(2.1)$ ειναι

$$x(2.1) = \frac{2}{2.1} = 0.95238$$

(γιατι;). Βλεπουμε οτι η προσεγγιστικη λυση με $\Delta t = 0.1$ εχει υψηλο *σχετικο σφαλμα*:

$$\left|\frac{0.95238 - 0.826}{0.95238}\right| = 0.13270.$$

Αλλα η προσεγγιστικη λυση με $\Delta t = 0.02$ εχει σημαντικα πιο χαμηλο σχετικο σφαλμα:

$$\left|\frac{0.95238 - 0.951}{0.95238}\right| = 0.00145.$$

14.1.15. Παρατηρηση: Θυμησου οτι η *τυπική μορφή* μιας ΔΕ 1ης τάξης είναι $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$. Αν τωρα $f(t,x) = f_1(t) f_2(x)$ παιρνουμε μια ειδικη μορφη ΔΕ η οποια μπορει να λυθει πολυ ευκολα.

14.1.16. Ορισμος: *Χωριζομενη ΔΕ* λεγεται καθε ΔΕ της μορφης

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t) f_2(x). \tag{14.8}$$

Επισης χωριζομενες ΔΕ λεγονται και αυτες οι οποιες εχουν τις (ισοδυναμες με την (14.8)) μορφες

$$f_1(t)\,dt = \frac{1}{f_2(x)}dx, \quad M(t)\,dt + N(x)\,dx = 0. \tag{14.9}$$

14.1.17. Θεωρημα: Η χωριζομενη ΔΕ

$$M(t)\,dt + N(x)\,dx + = 0. \tag{14.10}$$

εχει γενικη λυση την

$$\int M(t)\,dt + \int N(x)\,dx = c$$

ή ισοδυναμα την

$$G(t) + H(x) = c.$$

14.1.18. Παραδειγμα: Η γενική λύση της

$$tdt + xdx = 0$$

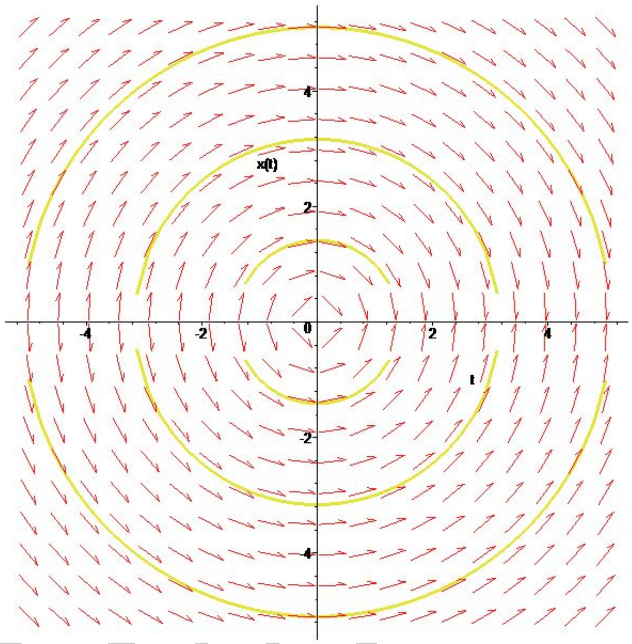
λαμβάνεται με ολοκλήρωση:

$$tdt + xdx = 0 \Rightarrow \int tdt + \int xdx = c \Rightarrow \frac{t^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c.$$

Η λυση μπορει να γραφει και στην μορφη

$$x(t) = \pm\sqrt{2c - t^2}.$$

Γεωμετρικα ειναι μια οικογενεια κυκλων με κεντρο το $(0, 0)$ και ακτινα $\sqrt{c}$, οπως φαινεται στο Σχημα 14.2.



Σχ.14.2: Η οικογενεια των λυσεων της $tdt + xdx = 0$.

14.1.19. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = ax. \tag{14.11}$$

Λύση. Η ΔΕ ειναι χωριζομενη (γιατι;) και μπορει να λυθει ως εξης:

$$\frac{dx}{x} = at \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int at \Rightarrow \ln x = at + c_1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{at+c_1} \Rightarrow x(t) = ce^{at}.$$

14.1.20. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x}. \tag{14.12}$$

Λύση. Η ΔΕ ειναι χωριζομενη (γιατι;) και μπορει να λυθει ως εξης:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x} \Rightarrow t^2 dt - xdx = 0 \Rightarrow \int t^2 dt - \int xdx = c \Rightarrow \frac{t^2}{3} - \frac{x^2}{2} = c.$$

Η τελευταια εκφραση δινει την λυση της (14.12) σε *πεπλεγμενη μορφη*. Μπορουμε να λυσουμε ως προς x και να γραψουμε την λυση στην μορφη

$$x(t) = \sqrt{2\left(\frac{t^2}{3} - c\right)}.$$

14.1.21. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$(1+t)\,xdt + (1-x)\,tdx = 0. \tag{14.13}$$

Λύση. Παρομοια με τις προηγουμενες, παιρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{t}dt + \frac{1-x}{x}dx = 0 \Rightarrow \\ \int \frac{1+t}{t}dt + \int \frac{1-x}{x}dx = c \Rightarrow \\ \ln|t| + t + \ln|x| - x = c \Rightarrow \\ \ln|xt| + t - x = c. \end{aligned}$$

14.1.22. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x(0) = 2, \quad \frac{dx}{dt} = xt. \tag{14.14}$$

Λύση. Η ΔΕ μπορει να λυθει ως εξης:

$$\frac{dx}{x} = tdt \Rightarrow \ln x = \frac{t^2}{2} + c_1 \Rightarrow x(t) = ce^{\frac{t^2}{2}}.$$

Τωρα

$$2 = x(0) = ce^{\frac{0^2}{2}} \Rightarrow c = 2.$$

Οποτε η ζητουμενη λυση ειναι

$$x(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}.$$

14.1.23. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = -5x. \tag{14.15}$$

η οποια ικανοποιει

$$\int_0^\infty x(t)\,dt = 1.$$

Λύση. Βλεπουμε αμεσως οτι η ΔΕ εχει γενικη λυση την $x(t) = ce^{-5t}$. Για να ικανοποιει και την ολοκληρωτικη συνθηκη, θα εχουμε

$$1 = \int_0^\infty ce^{-5t}dt = \frac{1}{5}c \Rightarrow c = 5.$$

Οποτε η ζητουμενη λυση ειναι

$$x(t) = 5e^{-5t}.$$

14.1.24. Ορισμος: Η συνάρτηση $f(t,x)$ λεγεται *ομοιογενής* n-στης ταξης ανν

$$\forall a \in \mathbb{R} : f(ax, at) = a^n f(x,t).$$

14.1.25. Παραδειγμα: Η $f(t,x) = \frac{x+t}{t}$ ειναι ομοιογενής μηδενικης ταξης, διοτι

$$\forall a \in \mathbb{R} : f(ax, at) = \frac{ax + at}{at} = a^0 f(x,t).$$

14.1.26. Θεωρημα: Έστω η ΔΕ 1ης τάξης

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{14.16}$$

όπου η $f(x,t)$ είναι *ομοιογενής* μηδενικης ταξης. Τότε με τις αντικαταστάσεις

$$x = ut, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

η (14.16) μετασχηματίζεται σε μία χωριζόμενη ΔΕ.

14.1.27. Θεωρημα: Έστω η ΔΕ 1ης τάξης

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0 \tag{14.17}$$

όπου οι $M(t,x)$, $N(t,x)$ είναι *ομοιογενεις* n-στης ταξης. Τότε με τις αντικαταστάσεις

$$x = ut, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

η (14.17) μετασχηματίζεται σε μία χωριζόμενη ΔΕ.

14.1.28. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}. \tag{14.18}$$

Λύση. Θετουμε $x = ut$, οποτε $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. Αντικαθιστωντας στην (14.18) παιρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u = \frac{t+ut}{t} &= 1 + u \Rightarrow \\ \frac{du}{dt}t = 1 \Rightarrow du = \frac{dt}{t} &\Rightarrow \int du = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \\ u = \ln|t| + c &\Rightarrow x(t) = t\ln|ct|. \end{aligned}$$

14.1.29. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{t^2 - x^2}. \tag{14.19}$$

Λύση. Θετουμε $x = ut$, οποτε $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. Αντικαθιστωντας στην (14.19) παιρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{ut^2}{t^2 - u^2t^2} = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow \\ \frac{du}{dt}t &= \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u^3}{1-u^2} \Rightarrow \\ \frac{dt}{t} &= \frac{1-u^2}{u^3}du \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du \Rightarrow \\ \ln|t| + c = -\frac{1}{2u^2} - \ln|u| &\Rightarrow \ln|t| + c = -\frac{1}{2\left(\frac{x}{t}\right)^2} - \ln\left|\frac{x}{t}\right| \Rightarrow -\frac{t^2}{2x^2} = \ln|cx|. \end{aligned}$$

Αυτη ειναι η λυση σε πλεγμενη μορφη.

14.1.30. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x(1) = 2, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t-x}{t}. \tag{14.20}$$

Λύση. Θετουμε $x = ut$, οποτε $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. Αντικαθιστωντας στην (14.18) παιρνουμε $\int \frac{1}{1-2u} du =$

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}t + u = \frac{t-ut}{t} = 1 - u \Rightarrow \\
&\frac{du}{dt}t = 1 - 2u \Rightarrow \frac{du}{1-2u} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{1}{1-2u}du = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \\
-&\frac{1}{2}\ln\left(u - \frac{1}{2}\right) = \ln t + c_1 \Rightarrow u - \frac{1}{2} = \frac{c}{t^2} \Rightarrow \\
&x(t) = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}.
\end{aligned}$$

Επισης

$$2 = x(1) = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

οποτε τελικα η ζητουμενη λυση ειναι

$$x(t) = \frac{t+3}{2}.$$

14.1.31. Ορισμος: Λεμε οτι η ΔΕ

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0 \tag{14.21}$$

ειναι *ακριβής* ανν

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

14.1.32. Θεωρημα: Η ΔΕ

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0 \tag{14.22}$$

ειναι ακριβης ανν υπαρχει συναρτηση $F(t,x)$ τετοια ωστε

$$M(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t} \text{ και } N(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Σε αυτη την περιπτωση η (14.22) εχει γενική λύση την

$$F(t,x) = c.$$

14.1.33. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$xdt + tdx = 0. \tag{14.23}$$

Λύση. Ελεγχουμε οτι η (14.23) ειναι ακριβης. Οντως

$$\begin{aligned}
M(t,x) &= x, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 1, \\
N(t,x) &= t, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 1
\end{aligned}$$

και οντως $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$. Οποτε υπαρχει καποια συναρτηση $F(t,x)$ τετοια ωστε $M(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}$ και $N(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}$. Τοτε εχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,x) = x \Rightarrow F(t,x) = \int x dt = xt + c(x).$$

Προσεξε οτι η σταθερα ολοκληρωσης ειναι $c(x)$, συναρτηση του x (γιατι συμβαινει αυτο;). Τοτε

$$\begin{aligned} t = N(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xt + c(x)) = t + \frac{\partial c}{\partial x} \Rightarrow \\ 0 = \frac{\partial c}{\partial x} \Rightarrow c(x) = c_1. \end{aligned}$$

Οποτε

$$F(t,x) = xt + c_1.$$

Αν και δεν ειναι απαραιτητο, σε αυτο το σημειο μπορουμε να ελεγξουμε οτι

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(xt + c_1) = x = M(t,x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xt + c_1) = t = N(t,x) \end{aligned}$$

αρα οντως η ΔΕ (14.23) ειναι ακριβης και η λυση της ειναι

$$xt + c_1 = 0.$$

14.1.34. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{2t}{x^3}dt + \frac{x^2 - 3t^2}{x^4}dx = 0. \tag{14.24}$$

Λύση. Ελεγχουμε οτι η (14.24) ειναι ακριβης. Οντως

$$\begin{aligned} M(t,x) &= \frac{2t}{x^3}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{6t}{x^4}, \\ N(t,x) &= \frac{x^2 - 3t^2}{x^4}, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{6t}{x^4} \end{aligned}$$

και οντως $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$. Οποτε υπαρχει καποια συναρτηση $F(t,x)$ τετοια ωστε $M(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}$ και $N(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}$. Τοτε εχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{2t}{x^3} \Rightarrow F(t,x) = \int \frac{2t}{x^3}dt = \frac{t^2}{x^3} + c(x).$$

Προσεξε οτι η σταθερα ολοκληρωσης ειναι $c(x)$, συναρτηση του x (γιατι συμβαινει αυτο;). Τοτε

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3t^2}{x^4} = N(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2}{x^3} + c(x)\right) = -\frac{3t^2}{x^4} + \frac{\partial c}{\partial x} \Rightarrow \\ \frac{1}{x^2} = \frac{\partial c}{\partial x} \Rightarrow c(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c_1. \end{aligned}$$

Οποτε

$$F(t,x) = \frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1.$$

Αν και δεν ειναι απαραιτητο, σε αυτο το σημειο μπορουμε να ελεγξουμε οτι

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1\right) = \frac{2t}{x^3} = M(t,x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1\right) = \frac{x^2 - 3t^2}{x^4} = N(t,x)$$

αρα οντως η ΔΕ (14.24) ειναι ακριβης και η λυση της ειναι

$$\frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1 = 0.$$

14.1.35. Παρατηρηση: Υπαρχουν περιπτωσεις στις οποιες η

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0 \tag{14.25}$$

δεν ειναι ακριβης, αλλα υπαρχει συνάρτηση $G(t,x)$ τέτοια ώστε να είναι ακριβής η ΔΕ

$$G(t,x)\,M(t,x)\,dt + G(t,x)\,N(t,x)\,dx = 0. \tag{14.26}$$

Σε τετοια περιπτωση λεμε οτι η $G(t,x)$ ειναι *ολοκληρωτικός παράγοντας* της (14.25). Παρακατω θα δωσουμε παραδειγματα επιλυσης ΔΕ με χρηση ολοκληρωτικου παραγοντα.

14.1.36. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\left(t + t^2 + x^2\right) dt + xtdx = 0. \tag{14.27}$$

Λύση. Εχουμε $M = t + t^2 + x^2$, $N = xt$ και

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(t + t^2 + x^2\right) = 2x \neq x = \frac{\partial}{\partial t}(xt) = \frac{\partial N}{\partial t}$$

αρα η (14.27) δεν ειναι ακριβης. Ομως εστω οτι υπαρχει συναρτηση $G(t)$ (η οποια εξαρταται μονο απο το t!!!) τετοια ωστε η

$$G(t)\left(t + t^2 + x^2\right) dt + G(t)\,xtdx = 0. \tag{14.28}$$

ειναι ακριβης. Τοτε θα πρεπει να ειναι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G(t)\left(t + t^2 + x^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(G(t)\,xt\right) \Rightarrow$$
$$G(t)\,2x = G(t)\,x + xt\frac{\partial G}{\partial t} \Rightarrow$$
$$G(t) = t\frac{\partial G}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = \frac{\partial t}{t}.$$

Οποτε

$$G(t) = ct$$

Αυτος ειναι ο ζητουμενος ολοκληρωτικος παραγοντας. Τωρα θα λυσουμε την

$$\left(t^2 + t^3 + x^2 t\right) dt + xt^2 dx = 0. \tag{14.29}$$

Θετοντας $M_1 = t^2 + t^3 + x^2 t$ και $N_1 = xt^2$ βλεπουμε οτι

$$\frac{\partial G}{\partial x}\left(t^2 + t^3 + x^2 t\right) = 2xt = \frac{\partial G}{\partial t}\left(xt^2\right)$$

αρα η (14.29) ειναι ακριβης. Οπως προηγουμενως, θα εχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M_1 = t^2 + t^3 + x^2 t \Rightarrow F = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{x^2 t^2}{2} + c(x).$$

Τωρα θα εχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = xt^2 + \frac{\partial c}{\partial x} = xt^2 = N_1 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Οποτε η λυση της (14.27) ειναι

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{x^2 t^2}{2} = c_1.$$

14.1.37. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\left(x + tx^2\right) dt - tdx = 0. \tag{14.30}$$

Λύση. Εχουμε $M = x + tx^2$, $N = -t$ και

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + tx^2\right) = 1 + 2xt \neq -1 = \frac{\partial}{\partial t}(-t) = \frac{\partial N}{\partial t}$$

αρα η (14.30) δεν ειναι ακριβης. Ομως εστω οτι υπαρχει συναρτηση $G(x)$ (η οποια εξαρταται μονο απο το x!!!) τετοια ωστε η

$$G(x)\left(x + tx^2\right) dt - G(x)\, tdx = 0. \tag{14.31}$$

ειναι ακριβης. Τοτε θα πρεπει να ειναι $\frac{(2+2xt)}{x+tx^2} = \frac{2}{x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(G(x)\left(x + tx^2\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-tG(x)\right) \Rightarrow \\
G(x)(1 + 2xt) + \left(x + tx^2\right)\frac{\partial G}{\partial x} &= -G(x) \Rightarrow \\
\frac{\partial G}{\partial x} &= -G(x)\frac{(2 + 2xt)}{x + tx^2} = -\frac{2G(x)}{x}.
\end{aligned}$$

Οποτε

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{2G(x)}{x} \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = -2\frac{\partial x}{x} \Rightarrow \ln G = -2\ln x + c_1 \Rightarrow G(x) = \frac{c}{x^2}.$$

Αυτος ειναι ο ζητουμενος ολοκληρωτικος παραγοντας. Τωρα θα λυσουμε την

$$\frac{x + tx^2}{x^2} dt - \frac{t}{x^2} dx = 0. \tag{14.32}$$

Θετοντας $M_1 = \frac{x+tx^2}{x^2}$ και $N_1 = -\frac{t}{x^2}$ βλεπουμε οτι

$$\frac{\partial G}{\partial x}\left(\frac{x+tx^2}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial G}{\partial t}\left(-\frac{t}{x^2}\right)$$

αρα η (14.32) ειναι ακριβης. Λυνοντας αυτη με τις προηγουμενες μεθοδους παιρνουμε

$$\frac{t}{x} + \frac{t^2}{2} + c = 0.$$

14.1.38. Ορισμος: *Γραμμικη ΔΕ 1ης ταξης* λεγεται καθε εξισωση της μορφης

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\,x = Q(t)\,.$$

14.1.39. Θεωρημα: Η γραμμική ΔΕ 1ης τάξης

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\,x = Q(t) \tag{14.33}$$

έχει γενική λύση την

$$x(t) = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)\,e^{\int P(t)dt}dt + c\right). \tag{14.34}$$

Αποδειξη. Θα ζητησουμε μια λυση της (14.33) της μορφης $x(t) = u(t)\,v(t)$. Αν παραγωγισουμε παιρνουμε

$$\frac{dx}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}.$$

Αντικαθιστωντας στην (14.33) παιρνουμε

$$\begin{aligned} u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + P(t)\,uv &= Q(t) \Rightarrow \\ u\left(\frac{dv}{dt} + P(t)\,v\right) + v\frac{du}{dt} &= Q(t)\,. \end{aligned} \tag{14.35}$$

Τωρα επιλεγουμε την $v(t)$ τετοια ωστε

$$\frac{dv}{dt} + P(t)\,v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -P(t)\,dt \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int P(t)\,dt \Leftrightarrow v(t) = ce^{-\int P(t)dt}.$$

Μπορουμε να θεσουμε (αυθαιρετα) $c = 1$ και θα εχουμε $u\left(\frac{dv}{dt} + P(t)\,v\right) = 0$, οποτε η (14.35) γινεται

$$\begin{aligned} v\frac{du}{dt} = Q(t) &\Rightarrow du = \frac{Q(t)\,dt}{v} = e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt \Rightarrow \\ u &= \int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c \Rightarrow uv = e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) \Rightarrow \\ x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) \end{aligned}$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

14.1.40. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + tx = t. \tag{14.36}$$

Λύση. Ειναι μια γραμμικη ΔΕ με $P(t) = t$ και $Q(t) = t$. Οποτε εχουμε

$$\int P(t)\,dt = -\int tdt = -\frac{t^2}{2}, \quad e^{-\int P(t)dt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt} Q(t)\,dt + c\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(\int e^{\frac{t^2}{2}} tdt + c\right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + c\right) = 1 + ce^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

14.1.41. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t+1}x = (t+1)^3. \tag{14.37}$$

Λύση. Ειναι μια γραμμικη ΔΕ με $P(t) = -\frac{2}{t+1}$ και $Q(t) = (t+1)^3$. Οποτε εχουμε

$$\begin{aligned} \int P(t)\,dt &= -\int \frac{2}{t+1}dt = -2\ln(t+1), \\ e^{-\int P(t)dt} &= (t+1)^2, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt} Q(t)\,dt + c\right) = (t+1)^2\left(\int \frac{1}{(t+1)^2}(t+1)^3\,dt + c\right) \\ &= (t+1)^2\left(\int (t+1)\,dt + c\right) = (t+1)^2\left(\frac{(t+1)^2}{2} + c\right) \Rightarrow \\ x(t) &= \frac{(t+1)^4}{2} + c(t+1)^2. \end{aligned}$$

14.1.42. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x(1) = 2, \quad \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = 1. \tag{14.38}$$

Λύση. Εχουμε $P(t) = \frac{1}{t}$ και $Q(t) = 1$. Οποτε εχουμε

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t, \quad e^{-\int P(t)dt} = \frac{1}{t}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt} Q(t)\,dt + c\right) = \frac{1}{t}\left(\int tdt + c\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2} + c\right) = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}. \end{aligned}$$

Επιπλεον
$$2 = x(1) = \frac{2}{2} + \frac{c}{2} \Rightarrow 1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2$$
οποτε η ζητουμενη λυση ειναι
$$x(t) = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$$

14.1.43. Πορισμα: Η γραμμική ΔΕ 1ης τάξης
$$\frac{dx}{dt} + ax = b \tag{14.39}$$
έχει γενική λύση την
$$x(t) = e^{-at}\left(\frac{b}{a}e^{at} + c\right) = \frac{b}{a} + ce^{-at}. \tag{14.40}$$

Αποδειξη. Ειναι $P(t) = x$, $Q(t) = b$. Οποτε ο γενικος τυπος γινεται
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(s)\, e^{\int P(s)ds} ds + c\right) \\ &= e^{-\int a dt}\left(\int be^{\int a dt} dt + c\right) \\ &= e^{-at}\left(\int be^{at} dt + c\right) = e^{-at}\left(\frac{b}{a}e^{at} + c\right) = \frac{b}{a} + ce^{-at}. \end{aligned}$$

14.1.44. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ
$$\frac{dx}{dt} + 5x = 2.$$

Λύση. Ειναι
$$x(t) = \frac{2}{5} + ce^{-5t}.$$

14.1.45. Ασκηση: Βρες την τιμη του a τετοια ωστε η λυση της ΔΕ
$$x(0) = 3, \quad \frac{dx}{dt} + ax = 2$$
να ικανοποιει $\lim_{t\to\infty} x(t) = 4$.
Λύση. Ευκολα βρισκουμε οτι η λυση της ΔΕ ειναι
$$x(t) = \left(2 - \frac{2}{a}\right)e^{-at} + \frac{2}{a}.$$
Εχουμε
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 4 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left(\left(2 - \frac{2}{a}\right)e^{-at} + \frac{2}{a}\right) = 4 \Rightarrow \frac{2}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$
Δηλ. η ζητουμενη τιμη του a ειναι $a = \frac{1}{2}$. Παρατηρειστε οτι αυτη δεν εξαρταται απο την αρχικη συνθηκη!

14.1.46. Ασκηση: Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + xt = t^3 x^3. \tag{14.41}$$

Λύση. Ειναι μια ΔΕ της μορφης

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\,x = Q(t)\,x^n$$

δηλ. ειναι μια *εξισωση Bernoulli*. Αυτες οι ΔΕ λυνονται με μια αντικατασταση της παρακατω μορφης. Διαιρουμε τνν (14.41) με x^3 και παιρνουμε

$$x^{-3}\frac{dx}{dt} + x^{-2}t = t^3. \tag{14.42}$$

Τωρα οριζουμε την $z = x^{-2}$ με $\frac{dz}{dt} = -2x^{-3}\frac{dx}{dt}$ και η (14.42) γινεται

$$\frac{dz}{dt} - 2tz = -2t^3$$

οποτε

$$z = t^2 + 1 + ce^{-t^2}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 + ce^{-t^2}}}.$$

14.2 Λυμενα Προβληματα

14.2.1. Ποιές από τις παρακάτω ΔΕ είναι γραμμικές;

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x+1}$.
2. $t^2\frac{dx}{dt} + x\sin t = e^x$.
3. $t^2\frac{dx}{dt} + x\sin t = e^t$.
4. $\frac{dx}{dt} + e^t x^2 = 4$.

Λύση. Μονο η τριτη ειναι γραμμικη ή, σωστοτερα, μπορει να τεθει στην γραμμικη μορφη

$$\frac{dx}{dt} + x\frac{\sin t}{t^2} = \frac{e^t}{t^2}.$$

14.2.2. Ελεγξε οτι η $x^2 + t^2 = c$ ειναι η λυση της ΔΕ $x\frac{dx}{dt} + t = 0$.
Λύση. Με πλεγμενη παραγωγιση παιρνουμε

$$2x\frac{dx}{dt} + 2t = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}.$$

Οποτε

$$x\frac{dx}{dt} + t = -x\frac{t}{x} + t = 0$$

και αρα η $x^2 + t^2 = c$ ειναι η λυση της ΔΕ.

14.2.3. Ελεγξε οτι η ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(1) = 1, \quad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = 0 \tag{14.43}$$

εχει στο συνολο $(0, \infty)$ την λυση $x(t) = \frac{1}{t}$.
Λύση. Η $x(t) = \frac{1}{t}$ εχει $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$. Αντικαθιστωντας στην (14.43) παιρνουμε

$$\forall t > 0 : \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1/t}{t} = 0.$$

Επισης εχουμε $x(1) = \frac{1}{1} = 1$. Αφου λοιπον ικανοποιειται η ΔΕ και η αρχικη συνθηκη, η $x(t)$ ειναι η ζητουμενη λυση *στο συνολο* (t, ∞). *Δεν* ειναι λυση στο $[0, \infty)$ διοτι δεν ειναι ορισμενη στο $t = 0$. Τι ισχυει στο συνολο $(-\infty, 0)$;

14.2.4. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2 + 1}. \tag{14.44}$$

Λύση. Η ΔΕ ειναι χωριζομενη. Την ξαναγραφουμε στην μορφη

$$dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \Rightarrow \int dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} \Rightarrow x = \arctan t + c.$$

14.2.5. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(0) = 4, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t + 2}{x + 1}.$$

Λύση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t + 2}{x + 1} \Rightarrow (x + 1)\, dx = (t + 2)\, dt \Rightarrow \frac{x^2}{2} + x = \frac{t^2}{2} + 2t + c$$

Για την αρχικη συνθηκη εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x^2(t)}{2} + x(t) &= \frac{t^2}{2} + 2t + c \Rightarrow \\ \frac{x^2(0)}{2} + x(0) &= \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + c \Rightarrow \\ \frac{4^2}{2} + 4 &= c \Rightarrow c = 12. \end{aligned}$$

Τελικα η ζητουμενη λυση ειναι

$$\frac{x^2}{2} + x = \frac{t^2}{2} + 2t + 12.$$

14.2.6. Λυσε την ΔΕ $t^2 dt + (x + 3)\, dx = 0$.
Λύση. Ειναι χωριζομενη ΔΕ. Εχουμε

$$\int t^2 dt + \int (x + 3)\, dx = c \Rightarrow \frac{t^3}{3} + \frac{(x + 3)^2}{2} = c.$$

14.2.7. Λυσε την ΔΕ

$$t^2(x+1)\,dt + x^2(t-1)\,dx = 0. \tag{14.45}$$

Λύση. Διαιρουμε με $\frac{1}{(x+1)(t-1)}$ και εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{t^2}{t-1}dt + \frac{x^2}{x+1}dx = 0 &\Rightarrow \\
\int \frac{t^2}{t-1}dt + \int \frac{x^2}{x+1}dx = c &\Rightarrow \\
\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt + \int \frac{x^2-1+1}{x+1}dx = c &\Rightarrow \\
\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt + \int \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = c &\Rightarrow \\
\frac{t^2}{2} + t + \ln\frac{1}{t-1} + \frac{x^2}{2} - t + \ln\frac{1}{x+1} = c&.
\end{aligned}$$

14.2.8. Λυσε την ΔΕ

$$4tdx - xdt = t^2 dx. \tag{14.46}$$

Λύση. Η ΔΕ γραφεται

$$\begin{aligned}
\left(4t-t^2\right)dx - xdt = 0 &\Rightarrow \\
\frac{dt}{t(t-4)} + \frac{dx}{x} = 0 &\Rightarrow \\
\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t}\right)dt + \int\frac{dx}{x} = c &\Rightarrow \\
\frac{1}{4}\ln(t-4) - \frac{1}{4}\ln t + \ln x = c &\Rightarrow \\
\frac{(t-4)x^4}{t^4} = c_1 \Rightarrow x = c_2\left(\frac{t}{t-4}\right)^{1/4}&.
\end{aligned}$$

14.2.9. Λυσε την *λογιστικη ΔΕ* με αρχικη συνθηκη

$$x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt} = x(1-x).$$

Κατοπιν αποδειξε οτι: (α) για $a \in (0,1)$ η $x(t)$ είναι αύξουσα και (β) για $a \in (1,\infty)$ η $x(t)$ είναι φθίνουσα.

14.2.10. *Λύση.* Ειναι χωριζομενη ΔΕ. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x(1-x)} = dt &\Rightarrow \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx = dt \\
&\Rightarrow \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx = \int dt \\
&\Rightarrow \ln\frac{x}{1-x} = t + c_1 \\
&\Rightarrow \frac{x}{1-x} = ce^t \Rightarrow x(t) = \frac{ce^t}{ce^t+1}.
\end{aligned}$$

Για την αρχικη συνθηκη εχουμε

$$a = x(0) = \frac{c}{c+1} \Rightarrow c = \frac{a}{1-a}.$$

Οποτε

$$x(t) = \frac{\frac{a}{1-a}e^t}{\frac{a}{1-a}e^t + 1} = \frac{ae^t}{ae^t - a + 1}.$$

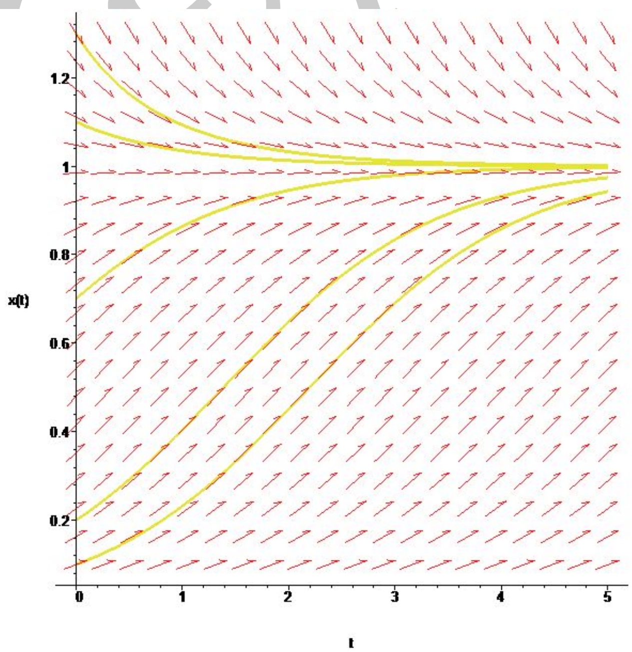
Μπορουμε να δειξουμε την ζητουμενη μονοτονια υπολογιζοντας το προσημο της

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ae^t(1-a)}{(ae^t - a + 1)^2}$$

στα διαστηματα $(0, 1)$ και $(1, \infty)$. Αλλα η συμπεριφορα της $x(t)$ γινεται καλυτερα κατανοητη αν παρατηρησουμε τα εξης. Αν $a \in (0, 1)$, η παραγωγος

$$\frac{dx}{dt}|_{t=0} = x(0)(1 - x(0)) = a(1 - a)$$

ειναι θετικη. Οποτε το $x(t)$ θα αυξανει εφοσον $x(t) \in (0, 1)$. Η $x(t)$ δεν θα μ πορεσει ποτε να παρει τιμες μεγαλυτερες του 1 διοτι, καθως $x(t) \to 1$, η παραγωγος παρεμενι θετικη αλλα τεινει προς το 0 (γιατι;). Με αλλα λογια, αν η αρχικη τιμη της $x(t)$ ειναι μεσα στο $(0, 1)$ το ιδιο θα συμβαινει και για τις επομενες τιμες $x(t)$ για καθε $t \geq 0$. Με αναλογο τροπο εξεταζουμε την περιπτωση $a > 1$. Αυτα φαινονται και στο Σχημα 14.3.



Σχ.14.3: Οι λυσεις της λογιστικης ΔΕ$\frac{dx}{dt} = x(1 - x)$.

Τι συμβαίνει οταν $a \in (-\infty, 1)$;

14.2.11. Βρες το a για το οποιο η λυση $x(t)$ της

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = a^2$$

ικανοποιει

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Λύση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + x^2 = a^2 &\Rightarrow \frac{dx}{a^2 - x^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int dt \\ &\Rightarrow \ln\frac{x+a}{x-a} = 2at + c_1 \Rightarrow \frac{x+a}{x-a} = ce^{2at} \Rightarrow x(t) = a\frac{ce^{2at}+1}{ce^{2at}-1}.\end{aligned}$$

Τωρα παρατηρουμε οτι *για καθε* $a \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} a\frac{ce^{2at}+1}{ce^{2at}-1} = a.$$

Αρα, το ζητουμενο ισχυει για $a \in \{-1, 1\}$.

14.2.12. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^3 + x^3}{3tx^2}. \tag{14.47}$$

Λύση. Η $f(t,x) = \frac{t^3+x^3}{3tx^2}$ ειναι ομοιογενης συναρτηση. Ξαναγραφουμε την ΔΕ στην μορφη

$$\left(t^3 + x^3\right) dt = 3tx^2 dx.$$

Θετουμε $x = vt$, οποτε και $dx = vdt + tdv$, και αντικαθιστωντας παιρνουμε

$$\begin{aligned}\left(t^3 + v^3t^3\right) dt &= 3t^3v^2\left(vdt + tdv\right) \\ &\Rightarrow \left(1 + v^3\right) dt = 3v^3 dt + 3v^2 tdv \\ &\Rightarrow \left(1 - 2v^3\right) dt = 3v^2 tdv \\ &\Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{3v^2}{1-2v^3}dv \\ &\Rightarrow \ln t = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2v^3\right) + c_1 \\ &\Rightarrow t^2\left(1 - 2v^3\right) = c \\ &\Rightarrow t^2\left(1 - 2\frac{x^3}{t^3}\right) = c \\ &\Rightarrow t^3 - 2x^3 = ct.\end{aligned}$$

14.2.13. Λυσε την ΔΕ

$$tdx - xdt = \sqrt{t^2 - x^2}dt. \tag{14.48}$$

Λύση. Η $f(t,x) = \frac{t^3+x^3}{3tx^2}$ ειναι ομοιογενης συναρτηση. Ξαναγραφουμε την ΔΕ στην μορφη

$$\left(t^3 + x^3\right) dt = 3tx^2 dx.$$

Θετουμε $x = vt$, οποτε και $dx = vdt + tdv$, και αντικαθιστωντας παιρνουμε

$$\begin{aligned}
\left(t^3 + v^3t^3\right) dt &= 3t^3v^2 (vdt + tdv) \\
&\Rightarrow \left(1 + v^3\right) dt = 3v^3 dt + 3v^2 tdv \\
&\Rightarrow \left(1 - 2v^3\right) dt = 3v^2 tdv \\
&\Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{3v^2}{1-2v^3} dv \\
&\Rightarrow \ln t = -\frac{1}{2}\ln\left(1-2v^3\right) + c_1 \\
&\Rightarrow t^2\left(1-2v^3\right) = c \\
&\Rightarrow t^2\left(1-2\frac{x^3}{t^3}\right) = c \\
&\Rightarrow t^3 - 2x^3 = ct.
\end{aligned}$$

14.2.14. Λυσε την ΔΕ

$$(2t + 3x)\, dt + (x - t)\, dx = 0. \tag{14.49}$$

Λύση. Ειναι ομοιογενης ΔΕ. Θετουμε $x = vt$, οποτε και $dx = vdt + tdv$, και αντικαθιστωντας παιρνουμε $\int \frac{2}{(v+1)^2+1} dv : -\pi$

$$\begin{aligned}
(2t + 3vt)\, dt + (vt - t)(vdt + tdv) &= 0 \\
&\Rightarrow (2 + 3v)\, dt + (v-1)(vdt + tdv) = 0 \\
&\Rightarrow \left(v^2 + 2v + 2\right) dt = t(1-v)\, dv \\
&\Rightarrow \frac{1-v}{(v+1)^2+1} dv = \frac{dt}{t} \\
&\Rightarrow -\int \frac{v+1}{(v+1)^2+1} dv + \int \frac{2}{(v+1)^2+1} dv = \frac{dt}{t} \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(v^2+2v+2\right) + 2\arctan(v+1) = \ln t + c_1 \\
&\Rightarrow \arctan(v+1) = \ln\left(ct\sqrt{v^2+2v+2}\right) \\
&\Rightarrow \arctan\left(\frac{t+x}{t}\right) = \ln\left(c\sqrt{t^2+2tx+2x^2}\right).
\end{aligned}$$

14.2.15. Έστω οι $M(t,x)$, $N(t,x)$ είναι *ομοιογενεις* n-στης ταξης. Αποδειξε οτι, με τις αντικαταστάσεις $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, η ΔΕ

$$M(t,x)\, dt + N(t,x)\, dx = 0 \tag{14.50}$$

μετασχηματίζεται σε μία χωριζόμενη ΔΕ.

Λύση. Εχουμε

$$0 = M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = t^n\left(M_1\left(\frac{x}{t}\right)dt + N_1\left(\frac{x}{t}\right)dx\right). \tag{14.51}$$

Θετοντας $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, η (14.51) γινεται

$$\begin{aligned}
0 &= t^n\left(M_1(u)\,dt + N_1(u)\,(udt + tdu)\right) \Rightarrow \\
0 &= M_1(u)\,dt + N_1(u)\,udt + N_1(u)\,tdu \Rightarrow \\
0 &= \left(M_1(u) + N_1(u)\,u\right)dt + N_1(u)\,tdu \Rightarrow \\
\frac{dt}{t} &= \frac{N_1(u)\,du}{M_1(u) + N_1(u)\,u}
\end{aligned}$$

η οποια ειναι χωριζομενη.

14.2.16. Λυσε την ΔΕ

$$(t + x)\,dt + (3t + 3x - 4)\,dt = 0. \tag{14.52}$$

Λύση. Η ΔΕ δεν ειναι ομοιογενης, αλλα τα $t + x$ και $3t + 3x$ μας οδηγουν στον μετασχηματισμο $z = t + x$, οποτε $x = z - t$ και $dx = dz - dt$. Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned}
zdt + (3z - 4)(dz - dt) = 0& \\
&\Rightarrow (4 - 2z)\,dt + (3z - 4)\,dz = 0 \\
&\Rightarrow 2dt = \frac{3z-4}{2-z}dz \\
&\Rightarrow 2\int dt = \int \frac{3z-4}{2-z}dz \\
&\Rightarrow 2t + c = -3z - 2\ln(z - 2) \\
&\Rightarrow 2t + c = -3(t + x) - 2\ln(t + x - 2) \\
&\Rightarrow t + 3x + 2\ln(2 - t - x) = c.
\end{aligned}$$

14.2.17. Λυσε την ΔΕ

$$\left(4t^3x^3 - 2tx\right)dt + \left(3t^4x^2 - t^2\right)dx = 0. \tag{14.53}$$

Λύση. Θετουμε $M = 4t^3x^3 - 2tx$, $N = 3t^4x^2 - t^2$. Παρατηρουμε οτι

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 12t^3x^2 - 2t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

αρα η ΔΕ ειναι ακριβης. Αρα υπαρχει $F(t,x)$ τετοια ωστε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} = M \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} &= \left(4t^3x^3 - 2tx\right) \\
\Rightarrow F &= \int \left(4t^3x^3 - 2tx\right)dt = t^4x^3 - t^2x + c(x).
\end{aligned}$$

Τοτε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N \Rightarrow 3t^4x^2 - t^2 + \frac{\partial c}{\partial x} = 3t^4x^2 - t^2 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \Rightarrow c(x) = c_1.$$

Οποτε η λυση ειναι $F(t,x) = 0$ δηλ.

$$t^4x^3 - t^2x + c_1 = 0$$

την οποια θα μπορουσαμε να ειχαμε εντοπισει και με απλη επισκοπηση.

14.2.18. Λυσε την ΔΕ

$$6t^5x^3dt + 3t^6x^2dx = 0. \tag{14.54}$$

Λύση. Με απλη επισκοπηση βλεπουμε οτι η $F(t,x) = t^6x^3$ ειναι η λυση της ΔΕ (γιατι;).

14.2.19. Λυσε την ΔΕ

$$\left(2t^3 + 3x\right)dt + (3t + x - 1)\,dx = 0. \tag{14.55}$$

Λύση. Θετουμε $M = (2t^3 + 3x)$, $N = (3t + x - 1)$. Παρατηρουμε οτι

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 3 = \frac{\partial N}{\partial t}$$

αρα η ΔΕ ειναι ακριβης. Αρα υπαρχει $F(t,x)$ τετοια ωστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = 2t^3 + 3x$$
$$\Rightarrow F = \int \left(2t^3 + 3x\right)dt = \frac{t^4}{2} + 3xt + c(x).$$

Τοτε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N \Rightarrow 3t + \frac{\partial c}{\partial x} = 3t + x - 1 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} = x - 1 \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2} - x + c_1.$$

Οποτε η λυση ειναι $F(t,x) = 0$ δηλ.

$$\frac{t^4}{2} + 3xt + \frac{x^2}{2} - x + c_1 = 0$$

14.2.20. Λυσε την ΔΕ

$$\left(t^4 + x^4\right)dt - \left(tx^3\right)dx = 0. \tag{14.56}$$

Λύση. Εχουμε $M = t^4 + x^4$, $N = -tx^3$ και

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(t^4 + x^4\right) = 4x^3 \neq -x^3 = \frac{\partial}{\partial t}\left(-tx^3\right) = \frac{\partial N}{\partial t}$$

αρα η (14.56) δεν ειναι ακριβης. Ομως εστω οτι υπαρχει συναρτηση $G(t)$ (η οποια εξαρταται μονο απο το t!!!) τετοια ωστε η

$$G(t)\left(t^4 + x^4\right)dt - G(t)\left(tx^3\right)dx = 0. \tag{14.57}$$

ειναι ακριβης. Τοτε θα πρεπει να ειναι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G(t)\left(t^4 + x^4\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-G(t)\,tx^3\right) \Rightarrow$$
$$G(t)\,4x^3 = -G(t)\,x^3 - \frac{\partial G}{\partial t}tx^3 \Rightarrow$$
$$5G(t) = -\frac{\partial G}{\partial t}t \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = -5\frac{\partial t}{t}.$$

Οποτε

$$G(t) = \frac{c}{t^5}$$

Αυτος ειναι ο ζητουμενος ολοκληρωτικος παραγοντας. Τωρα θα λυσουμε την

$$\frac{t^4 + x^4}{t^5}dt - \frac{tx^3}{t^5}dx = 0. \tag{14.58}$$

Θετοντας $M_1 = \frac{t^4+x^4}{t^5}$ και $N_1 = -\frac{tx^3}{t^5}$ βλεπουμε οτι

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^4 + x^4}{t^5}\right) = \frac{4x^3}{t^5} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{tx^3}{t^5}\right)$$

αρα η (14.58) ειναι ακριβης. Ξαναγραφουμε την (14.58) στην μορφη

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{x^4}{t^5}\right)dt - \frac{x^3}{t^4}dx = 0$$

και με απλη επισκοπηση βλεπουμε οτι η λυση της ειναι

$$\ln t + \frac{x^4}{4t^4} = c_1.$$

14.2.21. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t+1} = 2. \tag{14.59}$$

Λύση. Ειναι μια γραμμικη ΔΕ. Εχουμε $P(t) = \frac{1}{t+1}$ και $Q(t) = 2$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{1}{t+1}dt = \ln(t+1)\,, \quad e^{-\int P(t)dt} = \frac{1}{t+1}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) = \frac{1}{t+1}\left(\int (t+1)\,dt + c\right) \\ &= \frac{c + \frac{1}{2}t(t+2)}{t+1}. \end{aligned}$$

14.2.22. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + x = t^2 - t. \tag{14.60}$$

Λύση. Ειναι μια γραμμικη ΔΕ. Εχουμε $P(t) = 1$ και $Q(t) = t^2 - t$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt = \int dt = t, \quad e^{-\int P(t)dt} = e^{-t}$$

και $\int (t^2 - t)\,e^t dt = e^t(t^2 - 3t + 3)$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) = e^{-t}\left(\int \left(t^2 - t\right)e^t dt + c\right) \\ &= \left(t^2 - 3t + 3\right) + ce^{-t}. \end{aligned}$$

14.2.23. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt} + x = \sin t. \tag{14.61}$$

Λύση. Εχουμε $P(t) = 1$ και $Q(t) = \sin t$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt = \int 1dt = t, \quad e^{-\int P(t)dt} = e^{-t}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt} Q(t)\,dt + c\right) = e^{-t}\left(\int e^{t} \sin t + c\right) \\ &= e^{-t}\left(c - \frac{1}{2}\cos t e^{t} + \frac{1}{2}e^{t}\sin t\right) \\ &= ce^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t. \end{aligned}$$

Για την αρχικη συνθηκη:

$$1 = x(0) = ce^{-0} - \frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{2}\sin 0 = c - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}.$$

Οποτε

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

14.2.24. Βρες το a για το οποιο η λυση $x(t)$ της

$$x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt} + x = e^{-t}\sin t$$

ικανοποιει

$$\int_0^\infty x(t)\,dt = 1.$$

Λύση. Εχουμε $P(t) = 1$ και $Q(t) = e^{-t}\sin t$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt = \int 1dt = t, \quad e^{-\int P(t)dt} = e^{-t}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt} Q(t)\,dt + c\right) = e^{-t}\left(\int e^{t}e^{-t} \sin t + c\right) \\ &= e^{-t}(c - \cos t). \end{aligned}$$

Για να εχουμε $x(0) = a$ πρεπει να ειναι $c = a + 1$.

$$x(t) = e^{-t}(a + 1 - \cos t).$$

Τοτε

$$1 = \int_0^\infty x(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}(a + 1 - \cos t)\,dt = a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Οποτε τελικα

$$x(t) = e^{-t}\left(\frac{3}{2} - \cos t\right).$$

14.3 Αλυτα Προβληματα

14.3.1. Ποιές από τις παρακάτω ΔΕ είναι γραμμικές;

1. $\frac{dx}{dt} = 3x$.
2. $t\frac{dx}{dt} + t^2 x = \sin t$.
3. $x\frac{dx}{dt} + t^2 = \sin t$.
4. $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + e^t x = 4$.

Απ. Η 1 και 2 είναι γραμμικές, η 3 και 4 όχι.

14.3.2. Λύστε τις παρακατω ΔΕ

1. $\frac{dx}{dt} = t$. *Απ.* $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$.
2. $\frac{dx}{dt} = 2x$. *Απ.* $x(t) = Ce^{2t}$.
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = t$. *Απ.* $x(t) = t^2/2 + c_1$.
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \sin(t)$. *Απ.* $x(t) = -\cos(t) + c_1$.
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = t\mathrm{e}^t$. *Απ.* $x(t) = (t-1)\,\mathrm{e}^t + c_1$.
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\sin(t)}{x(t)}$. *Απ.* $x(t) = \sqrt{-2\cos(t) + c_1}, x(t) = -\sqrt{-2\cos(t) + c_1}$.
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{t^3}{x(t)}$. *Απ.* $x(t) = -1/2\sqrt{2t^4 + 4c_1}, x(t) = 1/2\sqrt{2t^4 + 4c_1}$.
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{1}{tx(t)}$. *Απ.* $x(t) = \sqrt{2\ln(t) + c_1}, x(t) = -\sqrt{2\ln(t) + c_1}$.
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{1}{\cos(t)\sin(x(t))}$. *Απ.* $x(t) = \pi - \arccos(\ln(\sec(t) + \tan(t)) + c_1)$.
10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = t^3(x(t))^2$. *Απ.* $x(t) = 4\left(-t^4 + 4c_1\right)^{-1}$.

14.3.3. Λυστε τις παρακατω ΔΕ με αρχικες συνθηκες.

1. $\frac{dx}{dt} = 2x$ με αρχική συνθήκη $x(0) = 5$. *Απ.* $x(t) = 5e^{2t}$.
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{1}{(t^2+2t+2)x(t)}$ με αρχικη συνθηκη: $x(0) = 1$. *Απ.* $x(t) = 1/2\sqrt{4 + 8\arctan(t+1) - 2\pi}$.
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{x(t)}$ με αρχικη συνθηκη $x(0) = 2$. *Απ.* $x(t) = \sqrt{2\mathrm{e}^t + 2}$.

14.3.4. Λυστε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{x(t)+t}{t}$. *Απ.* $x(t) = (\ln(t) + c_1)\,t$.
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{(x(t))^2+tx(t)}{t^2}$. *Απ.* $x(t) = -\frac{t}{\ln(t)-c_1}$.

3. $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{(x(t))^2 t + t^2 x(t)}{t^2 x(t)}$. *Απ.* $x(t) = (\ln(t) + c_1)\, t$.

4. $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{x(t)+t}{t}$. *Απ.* $x(t) = (\ln(t) + c_1)\, t$

5. $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{tx(t)+t^2}{t^2}$ με αρχικη συνθηκη : $x(1) = 4$. *Απ.* $x(t) = (\ln(t) + 4)\, t$.

6. $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{(x(t))^2+t^2}{tx(t)}$ με αρχικη συνθηκη : $x(4) = 1$. *Απ.* $x(t) = 1/4\,\sqrt{32\,\ln(t) - 64\,\ln(2) + 1}\,t$.

7. $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{(x(t))^2 t + t^3}{t^3}$ με αρχικη συνθηκη : $x(4) = 1$. *Απ.* $x(t) = \frac{\sqrt{3}t}{6}\left(\sqrt{3} + 3\,\tan\frac{\sqrt{3}(\ln(t)+c_1)}{2}\right)$.

14.3.5. Λυστε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+x^2}{xt}$.
2. $\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{t^2+x^2}$.
3. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-tx}{t^2}$.
4. $.\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-tx}{x^2}$.

14.3.6. Λυστε τις παρακατω ΔΕ.

1. $(t + 2x)\, dt + (2t + 3x)\, dx = 0$.

2. $2tdx - 2xdt = \sqrt{t^2 + 4x^2}dt$.

3. $txdt + (x + 1)(t - 1)\, dx = 0$.

4. $(t^3 + x^3)\, dt + 3tx^2 dx = 0$.

14.3.7. Λυστε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{x(t)+t}{t}$. *Απ.* $x(t) = (\ln(t) + c_1)\, t$.

2. $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{-x(t)\sin(t)+x(t)}{\cos(t)}$. *Απ.* $x(t) = c_1\,\cos(t)\tan(t) + c_1\,\cos(t)\sec(t)$

3. $\frac{d}{dt}x(t) + 2\,x(t) = 1$. *Απ.* $x(t) = 1/2 + e^{-2\,t}c_1$.

4. $\frac{d}{dt}x(t) + tx(t) = t$. *Απ.* $x(t) = 1 + e^{-1/2\,t^2}c_1$.

5. $\frac{d}{dt}x(t) + x(t) = \sin(t)$. *Απ.* $x(t) = -1/2\,\cos(t) + 1/2\,\sin(t) + e^{-t}c_1$.

6. $\frac{d}{dt}x(t) - t^2 x(t) = t^2$. *Απ.* $x(t) = -1 + e^{1/3\,t^3}c_1$.

7. $\frac{d}{dt}x(t) + 4\,tx(t) = 3\,t$. *Απ.* $x(t) = 3/4 + e^{-2\,t^2}c_1$.

8. $\frac{d}{dt}x(t) - 2\,\frac{x(t)}{t} = t^2$. *Απ.* $x(t) = (t + c_1)\, t^2$.

9. $\frac{d}{dt}x(t) + 5\,tx(t) = t^3$. *Απ.* $x(t) = 1/5\,t^2 - \frac{2}{25} + e^{-5/2\,t^2}c_1$.

10. $\frac{d}{dt}x(t) + 5\,tx(t) = t^5$. *Απ.* $x(t) = -\frac{4\,t^2}{25} + 1/5\,t^4 + \frac{8}{125} + e^{-5/2\,t^2}c_1$.

11. $\frac{d}{dt}x(t) + 5\,tx(t) = t^7$. *Απ.* $x(t) = \frac{24\,t^2}{125} - \frac{6\,t^4}{25} + 1/5\,t^6 - \frac{48}{625} + e^{-5/2\,t^2}c_1$.

12. $\frac{d}{dt}x(t) + t^2x(t) = x(t)$. *Απ.* $x(t) = c_1\,e^{-1/3\,t\left(t^2-3\right)}$.

13. $\frac{d}{dt}x(t) - 2\,\frac{x(t)}{t^2} = -3\,t^{-2}$. *Απ.* $x(t) = 3/2 + e^{-2\,t^{-1}}c_1$.

14.3.8. Λυστε τις ΔΕ :

1. $\frac{d}{dt}x(t) = 1/2\,\frac{(x(t))^2\cos(t)+1}{x(t)\sin(t)}$. *Απ.* $x(t) = \sqrt{c_1\,\sin(t) - \cos(t)}$, $x(t) = -\sqrt{sc_1\,\sin(t) - \cos(t)}$.

2. $\frac{d}{dt}x(t) + tx(t) = t(x(t))^2$. *Απ.* $x(t) = \left(1 + e^{1/2\,t^2}c_1\right)^{-1}$.

3. $\frac{d}{dt}x(t) + t^2x(t) = tx(t)$. *Απ.* $x(t) = c_1\,e^{-1/6\,t^2(2\,t-3)}$.

4. $\frac{d}{dt}x(t) + t^2x(t) = \sin(t)\,x(t)$. *Απ.* $x(t) = c_1\,e^{-1/3\,t^3-\cos(t)}$.

14.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

14.4.1. Θεωρησε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-(t+2) + \sqrt{t^2+4t+4x}}{2}.$$

Επαληθευσε ότι οι συναρτήσεις

$$y_1(t) = c^2 + ct + 2c + 1,$$
$$y_2(t) = -\frac{t^2+4t}{4},$$

είναι λύσεις της ΔΕ, η κάθε μία σε διαφορετικό διάστημα $[t_1, t_2]$. Προσδιορίσε τα αντίστοιχα διαστήματα.

14.4.2. Αποδειξε: η ΔΕ $x = t\frac{dx}{dt} + f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ έχει λύση την $x = ct + f(c)$.

14.4.3. Αποδειξε ότι η ΔΕ $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ έχει την λύση $\ln x = \int \frac{dz}{F(z)-z} + c$.

14.4.4. Αποδειξε ότι η ΔΕ $yF(ty)\,dt + tG(ty)\,dy = 0$ έχει την λύση $\ln t = \int \frac{G(y)}{y(G(y)-F(y))}dy + c$.

14.4.5. Οριζουμε την συναρτηση $d(x, y)$, οπου οι $x(t)$, $y(t)$ ειναι συνεχεις συναρτησεις στο $[t_1, t_2]$, ως εξης:

$$d(x, y) = \max_{t\in[t_1,t_2]} |x(t) - y(t)|.$$

Αποδειξε οτι, για καθε $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ συνεχεις στο $[t_1, t_2]$, ισχυουν τα εξης:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (\forall t \in [t_1, t_2] : x(t) = y(t)),$$
$$d(x, y) = d(y, x),$$
$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z).$$

Αυτες οι ιδιοτητες δειχνουν οτι η $d(x, y)$ ειναι μια *συναρτηση αποστασης* μεταξυ των $x(t)$ και $y(t)$.

14.4.6. Εστω συναρτηση $f(t,x)$ και αριθμος $R>0$ τετοια ωστε η f και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ ειναι συνεχεις για καθε στοιχειο (t,x) του συνολου

$$D_R(t_0,x_0)=\left\{(t,x):(t-t_0)^2+(x-x_0)^2<R\right\}.$$

Δινονται η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \quad x(0)=c \tag{14.62}$$

και η *ολοκληρωτικη εξισωση*

$$x(t)=c+\int_0^t f(s,x(s))\,ds. \tag{14.63}$$

Αποδειξε οτι: η $z(t)$ ειναι λυση της (14.62) ανν ειναι λυση της (14.63). Επισης αποδειξε ότι σε αυτη την περιπτωση, η σειρά συναρτήσεων η οποία προκύπτει από την παρακάτω επαναληπτική διαδικασία

$$z_0(t)=c, \qquad \forall n: z_{n+1}(t)=c+\int_0^t f(s,z_n(s))\,ds$$

ικανοποιεί

$$\forall t: \lim_{n\to\infty} z_n(t)=z(t).$$

14.4.7. Λεμε οτι η

$$x_0(t)=c, \qquad \forall n: x_{n+1}(t)=c+\int_0^t f(s,x_n(s))\,ds \tag{14.64}$$

εχει *σταθερο σημειο* την συναρτηση $z(t)$ ανν η $z(t)$ ικανοποιει την (14.64). Εστω συναρτηση $f(t,x)$ και αριθμος $R>0$ τετοια ωστε η f και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ ειναι συνεχεις για καθε στοιχειο (t,x) του συνολου

$$D_R(t_0,x_0)=\left\{(t,x):(t-t_0)^2+(x-x_0)^2<R\right\}.$$

Αποδειξε οτι, υπο αυτες τις συνθηκες, η (14.64) εχει ακριβως ενα σταθερο σημειο και αρα η (14.62) εχει ακριβως μια λυση.

14.4.8. Αποδειξε ότι η ΔΕ $\frac{dx}{dt}=\sqrt{|x|}$, $x\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$ έχει άπειρες λύσεις.

14.4.9. Αποδειξε ότι η ΔΕ $\frac{dx}{dt}=x^k$, $x(0)=0$, με σταθερά $k\in(0,1)$, έχει άπειρες λύσεις.

14.4.10. Βρες αναγκαιες συνθηκες ωστε η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt}=|x|^{m/n}$$

να εχει μοναδικη λυση· υποθετουμε οτι $m,n\in\mathbb{N}$.

14.4.11. Δίνεται η ΔΕ $\frac{dx}{dt}=x$, $x(0)=1$. Αποδειξε με προσεγγιση της συναρτησης απο αναδρομικη ακολουθια ότι $x(t)=e^t$.

14.4.12. Αποδειξε: αν $\forall t\in\mathbb{R}:\frac{dx}{dt}\leq f(t)\,x(t)$, τότε $\forall t\in\mathbb{R}: x(t)\leq x(0)\,e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}$.

14.4.13. Αποδειξε οτι: οταν η $f(t,x)$ ειναι ομοιογενης, η ΔΕ 1ης τάξης $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$, με την αντικατασταση $x=ut$ μετασχηματίζεται σε μία χωριζόμενη ΔΕ.

14.4.14. Αποδειξε ότι η ΔΕ $\frac{dx}{dt} = F(ax + by)$ μετατρέπεται σε χωριζόμενη με την αλλαγή μεταβλητής $v = ax + bt$.

14.4.15. Βρες μια συνθηκη την οποια πρεπει να ικανοποιουν οι $M(t,x)$, $N(t,x)$ ωστε η ΔΕ

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$$

να εχει ολοκληρωτικο παραγοντα της μορφης $f(xt)$.

14.4.16. Δειξε οτι: αν η ΔΕ

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$$

ειναι ομοιογενης *και* ακριβης, τοτε η λυση μπορει να τεθει στην μορφη

$$tM + xN = c.$$

14.4.17. Έστω συνάρτηση $f(t;c)$ η οποία εξαρτάται από την παράμετρο c. Λέμε ότι η $f(t;c)$ είναι *συνεχής ως προς την c στο διάστημα* $[t_1, t_2]$ ανν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in [t_1, t_2] : |c_1 - c_2| < \delta \Rightarrow |f(t;c_1) - f(t;c_2)| < \varepsilon.$$

Έστω $x(t;c)$ είναι η λύση της $\frac{dx}{dt} + p(t)\,x = 0$, $x(0) = c$. Αποδειξε ότι η $x(t;c)$ είναι συνεχής ως προς την c σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[t_1, t_2]$ στο οποίο η $p(t)$ είναι συνεχής.

14.4.18. Έστω $f(t)$ συνάρτηση συνεχής και φραγμένη στο $[0,\infty)$ και k θετική σταθερά. Αποδειξε:

1. Κάθε λύση της $\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$.
2. Η $\frac{dx}{dt} - kx = f(t)$ έχει λύση μη φραγμένη στο $[0,\infty)$.

14.4.19. Έστω $f(t)$ συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{t\to\infty} f(t) = m$ και k θετική σταθερά. Αποδειξε: για κάθε λύση $x(t)$ της $\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ ισχύει $\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{m}{k}$.

14.4.20. Βρειτε συναρτηση $f(t)$ τετοια ωστε για καθε $g(t)$ παραγωγισιμη στο $(0,1)$ ισχυει

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dg}{dt}.$$

14.4.21. Αποδειξτε: αν οι $f(t)$, $g(t)$ ικανοποιουν στο $\mathbb{R}$ την ΔΕ

$$\left(f^2 + g^2\right)\frac{df}{dt} + fg\frac{dg}{dt} = 0$$

τοτε οι $f(t)$, $g(t)$ ειναι φραγμενες.

14.4.22. Δινεται η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = ax + x^3$$

οπου $a > 0$. Δειξε οτι υπαρχει $t_0 \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε ειτε $\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$ ειτε $\lim_{t\to t_0} x(t) = -\infty$.

14.4.23. Λυσε την εξισωση

$$(\forall t \in (-\infty, 0] : x(t) = 0)\,, \quad \frac{dx}{dt} + x(t - t_0) = 1$$

οπου $t_0 > 0$.

14.4.24. Βρες ολες τις λυσεις της ΔΕ

$$f'\left(\frac{a}{t}\right) = \frac{t}{f(t)}.$$

Κεφάλαιο 15

Γραμμικες Διαφορικες Εξισωσεις με Σταθερους Συντελεστες

Οι γραμμικες ΔΕ με σταθερους συντελεστες αποτελουν μια κατηγορια ΔΕ για τις οποιες μπορουμε να αναπτυξουμε εκτεταμενη μεθοδολογια επιλυσης. Επισης ειναι ιδιαιτερως χρησιμες ως απλα αλλα αποτελεσματικα μοντελα πολλων φυσικων φαινομενων.

15.1 Θεωρια και Παραδειγματα

15.1.1. Ορισμος: Μια *γραμμικη ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες* εχει την μορφη

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + \dots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t).$$

Εαν $f(t) = 0$, λεμε οτι η ΔΕ ειναι *ομογενης* (αλλιως λεμε οτι ειναι *μη ομογενης*).

15.1.2. Παραδειγμα: Μια ομογενης γραμμικη ΔΕ 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες ειναι η

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0.$$

Μια μη ομογενης γραμμικη ΔΕ 3ης ταξης με σταθερους συντελεστες ειναι η

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = t.$$

15.1.3. Ορισμος: Η *χαρακτηριστικη εξισωση* της

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

ειναι η

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

15.1.4. Θεωρημα (Υπαρξης και Μοναδικοτητας): Δινεται η (ομογενης γραμμικη 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες) ΔΕ

$$x(0) = A, \quad x'(0) = B, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \tag{15.1}$$

Αυτη εχει *ακριβως μια λυση*. Συγκεκριμενα, αν r_1, r_2 ειναι οι ριζες της χαρακτηριστικης εξισωσης της (15.1) τοτε η λυση της (15.1) ειναι

$$\text{οταν } r_1 \neq r_2 : x(t) = \frac{B - Ar_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{B - Ar_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t}, \tag{15.2}$$

$$\text{οταν } r_1 = r_2 : x(t) = Ae^{r_1 t} + (B - Ar_1)\, te^{r_1 t}. \tag{15.3}$$

Αποδειξη. Μπορουμε να αποδειξουμε το θεωρημα με απλη αντικατασταση, αλλα θα ακολουθησουμε μια πιο λεπτομερη προσεγγιση η οποια θα μας δωσει καλυτερη κατανοηση του προβληματος.

Θα εξετασουμε πρωτα τις λυσεις της ΔΕ χωρις αρχικες συνθηκες

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \tag{15.4}$$

Ας υποθεσουμε οτι οι λυσεις εχουν την μορφη $x = e^{rt}$. Αντικαθιστωντας στην (15.4) παιρνουμε

$$\begin{aligned} &\forall t : r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0 \Rightarrow \\ &\forall t : \left(r^2 + a_1 r + a_0\right) e^{rt} = 0 \end{aligned} \tag{15.5}$$

το οποιο σαφως ισχυει για $r = r_1, r_2$. Τωρα θα εξετασουμε δυο περιπτωσεις.

1. Αν $r_1 \neq r_2$, τοτε εχουμε δυο λυσεις, τις $x_1(t) = e^{r_1 t}$ και $x_2(t) = e^{r_2 t}$.

2. Αν $r_1 = r_2$ εχουμε μονο μια λυση, την $x_1(t) = e^{r_1 t} = e^{r_2 t}$. Ομως αν θεσουμε $x_2(t) = te^{r_1 t}$ παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 &= r_1 e^{r_1 t}(r_1 t + 2) + a_1 e^{r_1 t}(r_1 t + 1) + a_0 t e^{r_1 t} \\ &= \left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_0\right) te^{r_1 t} + (2r_1 + a_1)\, e^{r_1 t} = 0. \end{aligned}$$

Διοτι (α) $r_1^2 + a_1 r_1 + a_0 = 0$ και (β) $r_1 = -\frac{a_1}{2}$ (διπλη ριζα).

Οποτε και στις δυο περιπτωσεις εχουμε βρει δυο λυσεις της (15.4). Τωρα θα δειξουμε οτι και καθε $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ ειναι επισης λυση. Αυτο συμβαινει διοτι

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}(c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_1 \frac{d}{dt}(c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_0 (c_1 x_1 + c_2 x_2) \\ &= c_1 \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_0\right) + c_2 \left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0\right) = 0. \end{aligned}$$

Αν τωρα θελουμε μια λυση της (15.1) μπορουμε να παρουμε την $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ και να επιλεξουμε τα c_1, c_2 ωστε να ικανοποιουν τις αρχικες συνθηκες.

1. Στην περιπτωση $r_1 \neq r_2$ εχουμε $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ και

$$\begin{aligned} A &= c_1 e^{0 r_1} + c_2 e^{0 r_2} = c_1 + c_2 \\ B &= c_1 r_1 e^{0 r_1} + c_2 r_2 e^{0 r_2} = c_1 r_1 + c_2 r_2. \end{aligned}$$

Δηλ. πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= A \\ r_1 c_1 + r_2 c_2 &= B \end{aligned}$$

Οι λυσεις υπαρχουν παντα, διοτι η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0,$$

και ειναι

$$c_1 = \frac{B - Ar_2}{r_1 - r_2}, \quad c_2 = -\frac{B - Ar_1}{r_1 - r_2}.$$

Αντικαθιστωντας στην $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ παιρνουμε τις λυσεις της (15.2).

2. Στην περιπτωση $r_1 = r_2$ εχουμε $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$ και $D_t \left(c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}\right) = e^{t r_1} \left(c_2 + c_1 r_1 + t c_2 r_1\right)$

$$\begin{aligned} A &= c_1 e^{0 r_1} + c_2 0 e^{0 r_2} = c_1 \\ B &= c_1 r_1 e^{0 r_1} + c_2 \left(1 + r_1\right) e^{0 r_1} = c_1 r_1 + c_2 \left(1 + r_1\right). \end{aligned}$$

Δηλ. πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 &= A \\ r_1 c_1 + c_2 &= B \end{aligned}$$

Οι λυσεις υπαρχουν παντα, διοτι η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

και ειναι

$$c_1 = A, \quad c_2 = B - Ar_1.$$

Αντικαθιστωντας στην $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ παιρνουμε τις λυσεις της (15.3).

Εχουμε λοιπον βρει *μια* λυση $x(t)$ της (15.1) και ειναι ακριβως αυτη των (15.2)-(15.3). Μπορει να υπαρχει και αλλη λυση $z(t)$; Αν υπηρχε θα ειχαμε

$$\begin{aligned} x(0) &= A, \quad x'(0) = B, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \\ z(0) &= A, \quad z'(0) = B, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = 0 \end{aligned}$$

Οριζοντας $u(t) = x(t) - z(t)$ και αφαιρωντας τις παραπανω κατα μελη βλεπουμε οτι η $u(t)$ πρεπει να ικανοποιει τις

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0$$

και αφηνεται στον αναγνωστη να επιβεβαιωσει οτι η *μοναδικη* λυση αυτης ειναι η $u(t) = 0$. Δηλαδη $z(t) = x(t)$ και αρα η $z(t)$ ταυτιζεται με την $x(t)$, μοναδικη λυση της (15.1).

15.1.5. Παραδειγμα: Η λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$x(0) = 1, x'(0) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0 \tag{15.6}$$

υπολογιζεται ως εξης. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

με ριζες τις $r_1 = -1$, $r_2 = -3$. Οποτε, συμφωνα με τον τυπο (15.2) η λυση ειναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2-1(-3)}{-1-(-3)}e^{-1t} - \frac{2-1(-1)}{-1-(-3)}e^{-3t} \Rightarrow \\ x(t) &= \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \end{aligned}$$

15.1.6. Παραδειγμα: Η λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \tag{15.7}$$

υπολογιζεται ως εξης. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

με διπλη ριζα $r_1 = r_2 = -2$. Οποτε, συμφωνα με τον τυπο (15.3) η λυση ειναι

$$\begin{aligned} x(t) &= 1e^{-2t} + (2-1(-2))\,te^{-2t} \Rightarrow \\ x(t) &= e^{-2t} + 4te^{-2t} \end{aligned}$$

15.1.7. Ασκηση: Βρες την λυση της ΔΕ

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0. \tag{15.8}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

με ριζες $r_1 = -2$, $r_2 = -3$. Οποτε, συμφωνα με τον τυπο (15.3) η λυση ειναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1-1(-3)}{(-2)-(-3)}e^{-2t} - \frac{1-1(-2)}{(-2)-(-3)}e^{-3t} \Rightarrow \\ x(t) &= 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \end{aligned}$$

15.1.8. Ασκηση: Βρες την λυση της ΔΕ

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \tag{15.9}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 4 = 0$$

με *μιγαδικες* ριζες $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. Οποτε, συμφωνα με τον τυπο (15.3) η λυση ειναι

$$x(t) = \frac{2 - 1(-2i)}{2i - (-2i)} e^{2it} - \frac{2 - 1(2i)}{2i - (-2i)} e^{-2it} \Rightarrow$$
$$x(t) = \frac{2 + 2i}{4i} e^{2it} - \frac{2 - 2i}{4i} e^{-2it}.$$

Πως ειναι δυνατον μια πραγματικη διαφορικη εξισωση να εχει μιγαδικες λυσεις; Για να βρουμε την απαντηση ας επξεργαστουμε την λυση:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2 + 2i}{4i} e^{2it} - \frac{2 - 2i}{4i} e^{-2it} \\ &= \frac{2}{4i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) + \frac{2i}{4i}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) \\ &= \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} + \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \\ &= \sin 2t + \cos 2t. \end{aligned}$$

Ειναι τυχαιο οτι η παραγοντοποιηση της μιγαδικης συναρτησης οδηγησε σε ισοδυναμη πραγματικη συναρτηση; Μπορεις να αποδειξεις οτι αυτο θα συμβαινει παντα;

15.1.9. Πορισμα: Δινεται η (ομογενης γραμμικη 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες) ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \tag{15.10}$$

Εστω r_1, r_2 οι ριζες της χαρακτηριστικης εξισωσης της (15.10). Η *γενικη* λυση της (15.10) ειναι

$$\begin{aligned} &\text{οταν } r_1 \neq r_2 : x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \\ &\text{οταν } r_1 = r_2 : x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}. \end{aligned}$$

Θα ονομαζουμε τις παραπανω *θεμελιωδεις λυσεις* της (**;;**).
Αποδειξη. Ειναι αμεση συνεπεια του Θεωρηματος 15.1.4. Διοτι μπορουμε να προσαρτησουμε στην (15.10) τυχουσες αρχικες συνθηκες $x(0) = A$ και $x'(0) = B$. Τοτε η λυση της (15.10) μαζι με τις αρχικες συνθηκες δινεται απο τις (15.2)-(15.3) και, αν θεσουμε $c_1 = \frac{B - Ar_2}{r_1 - r_2}$, $c_2 = -\frac{B - Ar_1}{r_1 - r_2}$ παιρνουμε την

$$\text{οταν } r_1 \neq r_2 : x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 \frac{B - Ar_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t}, \tag{15.11}$$

ενω αν θεσουμε $c_1 = A$, $c_2 = B - Ar_1$ παιρνουμε την

$$\text{οταν } r_1 = r_2 : x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}. \tag{15.12}$$

15.1.10. Παραδειγμα: Η γενικη λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0 \tag{15.13}$$

ειναι η

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

15.1.11. Παραδειγμα: Η γενικη λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=0 \tag{15.14}$$

ειναι η

$$x(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}.$$

15.1.12. Παραδειγμα: Η λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{15.15}$$

ειναι η

$$x(t)=c_1e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t}+c_2te^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t}$$

η οποια μπορει να γραφει (γιατι;) και στην ισοδυναμη μορφη

$$x(t)=p_1e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+p_2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

15.1.13. Θεωρημα: Εστω οτι $\overline{x}(t)$ ειναι *καποια* λυση της μη ομογενους γραμμικης ΔΕ 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t) \tag{15.16}$$

και $\widehat{x}(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ ειναι η γενικη λυση της *προσαρτημενης* ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0. \tag{15.17}$$

Τοτε η *γενικη* λυση της (15.16) ειναι

$$x(t)=\widehat{x}(t)+\overline{x}(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\overline{x}(t)$$

οπου $c_1,\ldots,c_N$ ειναι αυθαιρετες σταθερες.
Αποδειξη. Ξερουμε οτι η

$$\widehat{x}(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$$

ικανοποιει την

$$\frac{d^2\widehat{x}}{dt^2}+a_1\frac{d\widehat{x}}{dt}+a_0\widehat{x}=0 \tag{15.18}$$

και, εξ υποθεσεως, η $\overline{x}(t)$ ικανοποιει την

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}+a_1\frac{d\overline{x}}{dt}+a_0\overline{x}=f(t). \tag{15.19}$$

Προσθετοντας τις (15.18) και (15.19), με

$$x(t)=\widehat{x}(t)+\overline{x}(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\overline{x}(t),$$

παιρνουμε

$$\frac{d^2(\widehat{x}+\overline{x})}{dt^2}+a_1\frac{d(\widehat{x}+\overline{x})}{dt}+a_0(\widehat{x}+\overline{x})=0+f(t)\Rightarrow$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t)$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

15.1.14. Ερωτηση: Ποια προταση της *Γραμμικης Αλγεβρας* σου θυμιζει το παραπανω θεωρημα;

15.1.15. Παρατηρηση: Συνεπεια της παραπανω προτασης ειναι οτι: για να βρουμε την γενικη λυση της μη ομογενους ΔΕ, αρκει να βρουμε την γενικη λυση της προσαρτημενης ομογενους και να *ανακαλυψουμε* μια ειδικη λυση της ομογενους. Για την επιλογη της ειδικης λυσης μπορουμε να χρησιμοποιησουμε τον παρακατω πινακα:

οταν η $f(t)$ ειναι	δοκιμαζουμε την λυση
$at+b$	$At+B$
at^2+bt+c	At^2+Bt+C
$ae^{r_0 t}$	$Ae^{r_0 t}$
$a\cos(\omega t)$	$A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$
$a\sin(\omega t)$	$A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$
$ate^{r_0 t}$	$(At^2+Bt+C)\,e^{r_0 t}$
$at\cos(\omega t)$	$t\,(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))$
$at\sin(\omega t)$	$t\,(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))$

15.1.16. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2}5\frac{dx}{dt}+6x=1.$$

Λυση. Φαινεται ευκολα (ελεγξε το) οτι μια λυση της ΔΕ ειναι η $\overline{x}(t)=\frac{1}{6}$. Επισης η προσαρτημενη ομογενης

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=1$$

εχει δυο γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις $x_1(t)=e^{-2t}$ και $x_2(t)=e^{-3t}$. Αρα η γενικη λυση της (**;;**) ειναι

$$x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+1$$

(ελεγξε το).

15.1.17. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t^2.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $r^2+3r+2=0$ με ριζες $r_1=-1$, $r_2=-2$. Αρα η γενικη λυση ειναι

$$\widehat{x}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$$

Για την ειδικη λυση θα δοκιμασουμε την

$$\overline{x}(t)=At^2+Bt+C,$$
$$\frac{d\overline{x}}{dt}=2At+B,$$
$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}=2A.$$

Θα πρεπει να εχουμε

$$2A + 3(2At + B) + 2\left(At^2 + Bt + C\right) = t^2 \Rightarrow$$
$$2At^2 + (6A + 2B)t + (2A + 3B + 2C) = t^2$$

το οποιο δινει το συστημα

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ 6A + 2B &= 0 \\ 2A + 3B + 2C &= 0 \end{aligned}$$

με λυση

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = \frac{7}{4}.$$

Οποτε η ειδικη λυση ειναι

$$\overline{x}(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$$

και η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}.$$

15.1.18. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = e^{-t}.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $r^2 - 4r + 5 = 0$ με ριζες $r_1 = 2 + i$, $r_2 = 2 - i$. Γραφουμε την γενικη λυση στην μορφη

$$\widehat{x}(t) = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\sin t.$$

Για την ειδικη λυση θα δοκιμασουμε την

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &= Ae^{-t}, \\ \frac{d\overline{x}}{dt} &= -Ae^{-t}, \\ \frac{d^2\overline{x}}{dt^2} &= Ae^{-t}. \end{aligned}$$

Θα πρεπει να εχουμε

$$Ae^{-t} - 4(-Ae^{-t}) + 5Ae^{-t} = e^{-t} \Rightarrow 10Ae^{-t} = e^{-t} \Rightarrow A = \frac{1}{10}.$$

Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\sin t + \frac{1}{10}e^{-t}.$$

15.1.19. Ασκηση: Λυσε την

$$2\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=2\cos^2 t.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $2r^2+3r+1=0$ με ριζες $r_1=-1$, $r_2=-\frac{1}{2}$. Γραφουμε την γενικη λυση στην μορφη

$$\widehat{x}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-t/2}.$$

Για την ειδικη λυση, καταρχην γραφουμε

$$2\cos^2 t=1+\cos 2t$$

και θα δοκιμασουμε την

$$\begin{aligned}\overline{x}(t)&=A\cos 2t+B\sin 2t+C,\\ \frac{d\overline{x}}{dt}&=-2A\sin 2t+2B\cos 2t,\\ \frac{d^2\overline{x}}{dt^2}&=-4A\cos 2t-4B\sin 2t.\end{aligned}$$

Θα πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned}2(-4A\cos 2t-4B\sin 2t)+3(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)+A\cos 2t+B\sin 2t+C=1+\cos 2t\Rightarrow\\ (-7A+6B)\cos 2t+(-7B-6A)\sin 2t+C=1+\cos 2t.\end{aligned}$$

Οποτε εχουμε το συστημα

$$\begin{aligned}-7A+6B&=1\\ -7B-6A&=0\\ C&=1\end{aligned}$$

με λυση

$$A=-\frac{7}{85},\quad B=\frac{6}{85},\quad C=1$$

και αρα η γενικη λυση ειναι

$$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-t/2}-\frac{7}{85}\cos 2t+\frac{6}{85}\sin 2t+1.$$

15.1.20. Παρατηρηση: Τωρα θα δειξουμε την σχεση των Θεωρηματων 15.1.4, 15.1.9, 15.1.13 με την *Γραμμικη Αλγεβρα*.

15.1.21. Ορισμος: Λεμε οτι οι συναρτησεις $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_M(t)$ ειναι *γραμμικα ανεξαρτητες* ανν

$$(\forall t: c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\ldots+c_Mx_N(t)=0)\Rightarrow c_1=c_2=\ldots=c_M=0.$$

15.1.22. Παραδειγμα: Οι συναρτησεις $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητες. Διοτι εαν για καποια c_1, c_2, c_3 ισχυει

$$\forall t : c_1 + c_2 t + c_2 t^2 = 0$$

τοτε θα εχουμε (με $t = -1, 0, 1$)

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 - c_2 + c_3 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

Ειναι ευκολο να λυσουμε αυτο το συστημα και να δουμε οτι η μοναδικη του λυση ειναι

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

15.1.23. Παραδειγμα: Οι συναρτησεις $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = e^{-t}$, $x_3(t) = \cosh t$ ειναι γραμμικα εξαρτημενες.. Διοτι παιρνοντας $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ και $c_3 = -1$, εχουμε

$$\forall t : c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \cosh t = 0.$$

15.1.24. Ασκηση: Ειναι οι συναρτησεις $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $x_3(t) = 1$ γραμμικα εξαρτημενες;

Λυση. Θα ειναι γραμμικα εξαρτημενες αν υπαρχουν c_1 και c_2 τετοια ωστε (α) τουλαχιστον ενα εξ αυτων ειναι διαφορο του 0 και (β) ισχυει

$$\begin{aligned} &(\forall t : c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) = 0) \Leftrightarrow \\ &(\forall t : c_1(1+t) + c_2(1-t) + c_3 = 0) \Leftrightarrow \\ &(\forall t : c_1 + c_2 + c_3 + (c_1 - c_2)t = 0) \Leftrightarrow (c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad c_1 - c_2 = 0). \end{aligned}$$

Αλλα το τελευταιο ειναι το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

το οποιο εχει απειρια λυσεων, της μορφης $c_1 = -\frac{1}{2}c_3$, $c_2 = -\frac{1}{2}c_3$. Θετοντας $c_3 = 1$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, βλεπουμε οτι υπαρχουν μη μηδενικοι αριθμοι τετοι ωστε

$$\forall t : c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) = 0.$$

Αρα οι συναρτησεις $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $x_3(t) = 1$ ειναι γραμμικα εξαρτημενες.

15.1.25. Θεωρημα: Η ομογενης γραμμικη ΔΕ 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \tag{15.20}$$

εχει ακριβως 2 γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις.

Αποδειξη. Ξερουμε οτι οποιαδηποτε λυση της (15.20) εχει την μορφη

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Οι $x_1(t), x_2(t), x(t)$ ειναι (προφανως) γραμμικα εξαρτημενες, διοτι

$$\forall t : c_1 x_1 \cdot (t) + c_2 \cdot x_2(t) - 1 \cdot x(t) = c_1 x_1 \cdot (t) + c_2 \cdot x_2(t) - 1 \cdot (c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)) = 0.$$

Αρα η (15.20) δεν μπορει να εχει 3 ή περισσοτερες γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις. Απο την αλλη μερια, για $r_1 \neq r_2$, οι $x_1(t) = e^{r_1 t}$, $x_2(t) = e^{r_2 t}$ ειναι γραμμικα ανεξαρητες διοτι

$$\begin{aligned} &\forall t : c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = 0 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1 e^{0 r_1} + c_2 e^{0 r_2} = 0 \\ c_1 e^{1 r_1} + c_2 e^{1 r_2} = 0 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \end{aligned}$$

Παρομοια, για $r_1 = r_2$, οι $x_1(t) = e^{r_1 t}$, $x_2(t) = t e^{r_1 t}$ ειναι γραμμικα ανεξαρητες διοτι

$$\begin{aligned} &\forall t : c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} = 0 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1 e^{0 \cdot r_1} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{0 \cdot r_1} = 0 \\ c_1 e^{1 \cdot r_1} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{1 \cdot r_1} = 0 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1 = 0 \\ c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \end{aligned}$$

Αρα η (15.20) εχει ακριβως δυο γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις.

15.1.26. Θεωρημα: Εστω $\mathcal{X}$ το συνολο των λυσεων της

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \tag{15.21}$$

Τοτε ισχυει το εξης

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} : (z_1, z_2 \in \mathcal{X}) \Rightarrow (c_1 z_1 + c_2 z_2 \in \mathcal{X}).$$

Δηλαδη το $\mathcal{X}$ ειναι κλειστο ως προς γραμμικους συνδυασμους, ή με αλλα λογια ειναι ενας *διανυσματικος χωρος*.

Αποδειξη. Αν $z_1, z_2 \in \mathcal{X}$, ειναι λυσεις της (15.21). Τοτε για καθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{dt^2} + a_1 \frac{dz_1}{dt} + a_0 z_1 = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 (c_1 z_1)}{dt^2} + a_1 \frac{d (c_1 z_1)}{dt} + a_0 (c_1 z_1) = 0 \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} + a_1 \frac{dz_1}{dt} + a_0 z_1 = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 (c_1 z_1)}{dt^2} + a_1 \frac{d (c_1 z_1)}{dt} + a_0 (c_1 z_1) = 0 \end{aligned}$$

Προσθετοντας κατα μελη εχουμε

$$\frac{d^2 (c_1 z_1 + c_2 z_2)}{dt^2} + a_1 \frac{d (c_1 z_1 + c_2 z_2)}{dt} + a_0 (c_1 z_1 + c_2 z_2) = 0$$

το οποιο σημαινει οτι $c_1 x_1 + c_2 x_2 \in \mathcal{X}$.

15.1.27. Θεωρημα: Εστω x_1, x_2 οι θεμελιωδεις λυσεις της

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0. \tag{15.22}$$

Τοτε οι x_1, x_2 ειναι μια *βαση* του $\mathcal{X}$. Δηλ.

$$x \in \mathcal{X} \Rightarrow x = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Αποδειξη. Εχουμε ηδη δει οτι καθε λυση x της (15.22) (δηλ. καθε στοιχειο του $\mathcal{X}$) γραφεται στην μορφη $x = c_1x_1 + c_2x_2$. Επιπλεον εχουμε δει οτι οι x_1, x_2 ειναι γραμμικα ανεξρατητες. Απο αυτα προκυπτει το ζητουμενο.

15.1.28. Παρατηρηση: Ολα τα παραπανω μπορουν να γενικευτουν για την περιπτωση των γραμμικων ΔΕ *N-στης ταξης*, οπως φαινεται απο τα επομενα θεωρηματα.

15.1.29. Ορισμος: Η *χαρακτηριστικη εξισωση* της

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

ειναι η

$$r^N + a_{N-1}r^{N-1} + \ldots + a_1r + a_0 = 0.$$

15.1.30. Θεωρημα: Εστω $r_1, r_2, \ldots, r_K$ οι *διακριτες* ριζες (με αντιστοιχες πολλαπλοτητες $M_1, M_2, \ldots, M_K$) της χαρακτηριστικης εξισωσης της

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0 \tag{15.23}$$

Η γενικη λυση της (15.23) εχει την μορφη

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{M_k} c_{k,i}t^{i-1}e^{r_kt}.$$

Θα ονομαζουμε τις συναρτησεις

$$e^{r_1t}, te^{r_1t}, \ldots, , t^{M_1-1}e^{r_1t}, e^{r_2t}, \ldots, t^{M_K-1}e^{r_Kt}$$

θεμελιωδεις λυσεις της (15.23).

15.1.31. Θεωρημα: Εστω οτι $\overline{x}(t)$ ειναι *καποια* λυση της μη ομογενους γραμμικης ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \tag{15.24}$$

και $x_1(t), \ldots, x_N(t)$ ειναι οι N θεμελιωδεις λυσεις της *προσαρτημενης* ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0. \tag{15.25}$$

Τοτε η *γενικη* λυση της (15.16) ειναι

$$x(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_Nx_N(t) + \overline{x}(t)$$

οπου $c_1, \ldots, c_N$ ειναι αυθαιρετες σταθερες.

15.1.32. Θεωρημα: Η ομογενης γραμμικη ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

εχει ακριβως N γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις.

15.1.33. Θεωρημα: Εστω $\mathcal{X}$ το συνολο των λυσεων της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0.$$

Τοτε ισχυει το εξης

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} : c_1x_1 + c_2x_2 \in \mathcal{X}.$$

Δηλαδη το $\mathcal{X}$ ειναι ενας *διανυσματικος χωρος*.

15.1.34. Θεωρημα: Οι θεμελιωδεις λυσεις $x_1, ..., x_N$ της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0.$$

ειναι μια *βαση* του $\mathcal{X}$. Δηλ.

$$x \in \mathcal{X} \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n.$$

15.2 Λυμενα Προβληματα

15.2.1. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

με ριζες $r_1 = 1$, $r_2 = -4$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{-4t}$$

15.2.2. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 25x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - 10r + 25 = 0$$

με διπλη ριζα $r_1 = r_2 = 5$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1e^{5t} + c_2te^{5t}.$$

15.2.3. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^4+2r^2+1=0$$

με διπλες ριζες $r_1=i$, $r_2=-i$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t)=c_1e^{it}+c_2te^{it}+c_3e^{-it}+c_4te^{-it}$$

η οποια ομως μπορει να γραφει και στην μορφη (αποδειξε το)

$$x(t)=p_1\cos t+p_2t\cos t+p_3\sin t+p_4t\sin t.$$

15.2.4. Ασκηση: Λυσε την

$$x(0)=-1,\quad x'(0)=2,\quad 4\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+17x=0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$4r^2+4r+17=0$$

με ριζες $r_1=-\frac{1}{2}+2i$, $r_2=-\frac{1}{2}-2i$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t)=c_1e^{\left(-\frac{1}{2}+2i\right)t}+c_2e^{\left(-\frac{1}{2}-2i\right)t}$$

ή

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-\frac{t}{2}}\left(p_1\cos 2t+p_2\sin 2t\right),\\ x'(t)&=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(p_1\cos 2t-4p_2\cos 2t+4p_1\sin 2t+p_2\sin 2t\right).\end{aligned}$$

Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned}-1&=x(0)=p_1\cos 0+p_2\sin 0=p_1\\ 2&=x'(0)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(p_1\cos 0-4p_2\cos 0+4p_1\sin 0+p_2\sin 0\right)=-\frac{1}{2}p_1+2p_2\end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned}p_1&=-1\\ -\frac{1}{2}p_1+2p_2&=2\end{aligned}$$

με λυσεις $p_1=-1$, $p_2=\frac{3}{4}$. Οποτε τελικα

$$x(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left(-\cos 2t+2\sin 2t\right).$$

15.2.5. Ασκηση: Λυσε την

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right)=0,\quad x'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2,\quad \frac{d^2x}{dt^2}+16x=0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2+16=0$$

με διπλες ριζες $r_1=4i$, $r_2=-4$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t)=c_1e^{4it}+c_2e^{-4it}$$

ή

$$\begin{aligned} x(t)&=p_1\cos 4t+p_2\sin 4t,\\ x'(t)&=4p_2\cos 4t-4p_1\sin 4t. \end{aligned}$$

Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} 0&=x\left(\frac{\pi}{3}\right)=p_1\cos\frac{4\pi}{3}+p_2\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}\sqrt{3}p_2\\ 2&=x'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4p_2\cos\frac{4\pi}{3}-4p_1\sin\frac{4\pi}{3}=2\sqrt{3}p_1-2p_2 \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}\sqrt{3}p_2&=0\\ 2\sqrt{3}p_1-2p_2&=2 \end{aligned}$$

με λυσεις $p_1=\frac{1}{4}$, $p_2=-\frac{1}{4}$. Οποτε τελικα

$$x(t)=\frac{1}{4}\cos 4t-\frac{1}{4}\sin 4t.$$

15.2.6. Ασκηση: Λυσε την

$$x(0)=1,\quad x'(0)=5,\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2x=0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2+r+2=0$$

με $r_1=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $r_2=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\begin{aligned} x(t)&=e^{-t/2}\left(p_1\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+p_2\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}\right),\\ x'(t)&=-\frac{e^{-t/2}}{2}\left(p_1\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+p_2\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}-\sqrt{7}p_2\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+\sqrt{7}p_1\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}\right). \end{aligned}$$

Τοτε εχουμε

$$
\begin{aligned}
1 &= x(0) = p_1, \\
5 &= x'(0) = -\left(p_1 - \sqrt{7}p_2\right)
\end{aligned}
$$

με λυσεις $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{6\sqrt{7}}{7}$. Οποτε τελικα

$$x(t) = e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{7}t}{2} + \frac{6\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}\right).$$

15.2.7. Ασκηση: Λυσε την

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} - 6x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = 0$$

με ριζες $r_1 = -3$, $r_2 = 2$, $r_3 = -1$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-t}, \\
x'(t) &= -3c_1e^{-3t} + 2c_2e^{2t} - c_3e^{-t}, \\
x''(t) &= 9c_1e^{-3t} + 4c_2e^{2t} + c_3e^{-t}.
\end{aligned}
$$

Τοτε εχουμε

$$
\begin{aligned}
0 &= c_1 + c_2 + c_3 \\
0 &= -3c_1 + 2c_2 - c_3 \\
1 &= 9c_1 + 4c_2 + c_3
\end{aligned}
$$

με λυσεις $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = \frac{1}{15}$, $c_3 = -\frac{1}{6}$. Οποτε τελικα

$$x(t) = \frac{1}{10}e^{-3t} + \frac{1}{15}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t}.$$

15.2.8. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 16x = 2e^{4t}.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $r^2 - 16 = 0$ οποτε η γενικη λυση της προσαρτημενης ομογενους ειναι

$$x(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-4t}.$$

Για την ειδικη λυση δοκιμαζουμε

$$
\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= Ate^{4t} \\
\overline{x}'(t) &= Ae^{4t}(4t + 1) \\
\overline{x}''(t) &= 8Ae^{4t}(2t + 1)
\end{aligned}
$$

οποτε πρεπει να εχουμε

$$8Ae^{4t}(2t+1) - 16Ate^{4t} = 2e^{4t} \Rightarrow 8A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Τελικα λοιπον η λυση της ΔΕ ειναι

$$x(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-4t} + \frac{t}{4}e^{4t}.$$

15.2.9. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 25x = 30t + 3.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - 10r + 25 = 0$$

οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\widehat{x}(t) = c_1e^{5t} + c_2te^{5t}.$$

Για την ειδικη λυση δοκιμαζουμε

$$\overline{x}(t) = At + B$$
$$\overline{x}'(t) = A$$
$$\overline{x}''(t) = 0$$

οποτε πρεπει να εχουμε

$$0 - 10A + 25(At + B) = 30t + 3.$$

Δηλ.

$$(25A = 30, \quad -10A + 25B = 3) \Rightarrow \left(A = \frac{6}{5}, \quad B = \frac{3}{5}\right).$$

Τελικα λοιπον η λυση της ΔΕ ειναι

$$x(t) = c_1e^{5t} + c_2te^{5t} + \frac{6}{5}t + \frac{3}{5}.$$

15.2.10. Ασκηση: Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 6t^2 + 2 - 12e^{3t}.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\widehat{x}(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}.$$

Για την ειδικη λυση θα δοκιμαζαμε $\overline{x}(t) = At^2 + Bt + C + De^{3t}$. Αλλα ο ορος e^{3t} εμφανιζεται ηδη στην $\widehat{x}(t)$, οπως και ο te^{3t}. Οποτε θα δοκιμασουμε την $D_{tt}\left(At^2 + Bt + C + Dt^2e^{3t}\right) =$

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= At^2 + Bt + C + Dt^2e^{3t} \\
\overline{x}'(t) &= B + 2At + 3t^2De^{3t} + 2tDe^{3t} \\
\overline{x}''(t) &= 2A + 2De^{3t} + 9t^2De^{3t} + 12tDe^{3t}
\end{aligned}$$

οποτε πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned}
&\left(2A + 2De^{3t} + 9t^2De^{3t} + 12tDe^{3t}\right) - 6\left(B + 2At + 3t^2De^{3t} + 2tDe^{3t}\right) + 9\left(At^2 + Bt + C + Dt^2e^{3t}\right) \\
&= 6t^2 + 2 - 12e^{3t}
\end{aligned}$$

Ομαδοποιωντας και εξισωνοντας αντιστοιχους ορους καταληγουμε στο συστημα

$$\begin{aligned}
9A &= 6 \\
-12A + 9B &= 0 \\
2A - 6B + 9C &= 2 \\
2E &= -12
\end{aligned}$$

με λυσεις

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{8}{9}, \quad C = \frac{2}{3}, \quad D = -6.$$

Τελικα λοιπον η λυση της ΔΕ ειναι

$$x(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{9}t + \frac{2}{3} - 6t^2e^{3t}.$$

15.2.11. Ασκηση: Λυσε την

$$y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 4t + 10\sin t.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 1 = 0$$

οποτε η γενικη λυση της αντιστοιχης ομογενους ειναι

$$\overline{x}(t) = p_1\cos t + p_2\sin t.$$

Αφου η $\sin t$ εμφανιζεται στην γενικη λυση, για την ειδικη δοκιμαζουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(t) &= At + B + Ct\cos t + Dt\sin t \\
\widehat{x}'(t) &= A + D\sin t + C\cos t + tD\cos t - Ct\sin t \\
\widehat{x}''(t) &= 2D\cos t - 2C\sin t - tD\sin t - Ct\cos t
\end{aligned}$$

Τοτε πρπει να εχουμε

$$(2D\cos t - 2C\sin t - tD\sin t - Ct\cos t) + At + B + Ct\cos t + Dt\sin t = 4t + 10\sin t$$

και αρα

$$\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 0 \\ 2D &= 0 \\ -2C &= 10 \end{aligned}$$

οποτε η ειδικη λυση γινεται

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t) &= 4t - 5t\cos t \\ \widehat{x}'(t) &= 4 - 5(\cos t - t\sin t) \\ \widehat{x}''(t) &= -2\sin t - t\cos t. \end{aligned}$$

Τωρα η λυση $x(t) = \overline{x}(t) + \widehat{x}(t)$ γινεται

$$\begin{aligned} x(t) &= p_1\cos t + p_2\sin t + 4t - 5t\cos t \\ x'(t) &= p_2\cos t - p_1\sin t + 4 - 5\cos t + 5t\sin t \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} 0 &= x(\pi) = p_1\cos\pi + p_2\sin\pi + 4\pi - 5\pi\cos\pi = -p_1 + 4\pi + 5\pi \\ 2 &= x'(\pi) = p_2\cos\pi - p_1\sin\pi + 4 - 5\cos\pi + 5t\sin t = -p_2 + 4 + 5 \end{aligned}$$

με λυσεις $p_1 = 9\pi$, $p_2 = 7$. Οποτε τελικα

$$x(t) = 9\pi\cos t + 7\sin t + 4t - 5t\cos t.$$

15.2.12. Ασκηση: Λυσε την

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 5, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = (3+t)e^{-2t}.$$

Λυση. Η γενικη λυση της αντιστοιχης ομογενους ειναι

$$\widehat{x}(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}.$$

Υποθετουμε για την μερικη λυση

$$\overline{x}(t) = \left(At^3 + Bt^2\right)e^{-2t}$$

και λυνοντας προκυπτει $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{2}$. Οποτε

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + \left(\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2}\right)e^{-2t} \\ x'(t) &= -\frac{1}{6}e^{-2t}\left(12c_1 - 18t - 6c_2 + 12tc_2 + 15t^2 + 2t^3\right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 2 &= x(0) = c_1, \\ 5 &= x'(0) = -2c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Τελικα $c_1 = 2$, $c_2 = 9$ και

$$x(t) = \left(2 + 9t + \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right)e^{-2t}.$$

15.3 Αλυτα Προβληματα

15.3.1. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$. *Απ.* $c_1 e^{3t} + c_2 e^t$.
2. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 8x = 0$. *Απ.* $c_1 e^{2t} \cos 2t - c_2 e^{2t} \sin 2t$.
3. $2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - x = 0$. *Απ.* $c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^t$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 0$. *Απ.* $c_1 \left(\cos \frac{1}{2}\sqrt{3}t\right) e^{\frac{1}{2}t} - c_2 \left(\sin \frac{1}{2}\sqrt{3}t\right) e^{\frac{1}{2}t}$.

15.3.2. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$. *Απ.* $\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t$.
2. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$. *Απ.* $e^{t/2} - 2te^{t/2}$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$. *Απ.* $3\cos 4t - \sin 4t$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 36x = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$. *Απ.* $(t-1)\, e^{-6(t-1)}$.

15.3.3. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = t^2 - 1$. *Απ.* $\frac{8}{9}t + c_1 e^{3t} + c_2 e^t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{17}{27}$.
2. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = \sin t$. *Απ.* $\frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + c_1 e^{3t} + c_2 e^t$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = \sin t$. *Απ.* $\frac{4}{25}\cos t + \frac{3}{25}\sin t + c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = t + 1$. *Απ.* $t + c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}t - c_2 t e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
5. $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = t\sin t$. *Απ.* $c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{1}{25}\sin t - \frac{1}{10}t\cos t + \frac{1}{10}t\sin t$.
6. $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = e^{-2t}$. *Απ.* $c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{e^{2t}}(t-1)$.
7. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = e^{-2t}$. *Απ.* $c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{t^2}{2} e^{-2t}$.
8. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \cos 2t$. *Απ.* $c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{16}\cos 2t$.

15.3.4. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = e^t + t^3$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. *Απ.* $\frac{3}{2}\cos t + \frac{11}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t + t^3 - 6t$.
2. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = e^t \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$. *Απ.* $\frac{9}{8}e^{2t} + \frac{3}{40}e^{-2t} + e^t\left(\frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t\right)$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = te^t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$. *Απ.* $e^t\left(\frac{t^2}{2} - t + 2\right)$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = t + \sin 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. *Απ.* $\frac{17}{15}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{3}{20}\sin 2t$.

15.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

15.4.1. Αποδειξε οτι: αν $r_1, r_2, ..., r_K$ ειναι οι *διακριτες* ριζες (με αντιστοιχες πολλαπλοτητες $M_1, M_2, ..., M_K$) της χαρακτηριστικης εξισωσης της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0, \tag{15.26}$$

τοτε η γενικη λυση της (15.26) εχει την μορφη

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{M_k} c_{k,i} t^{i-1} e^{r_k t}.$$

15.4.2. Αποδειξε οτι: αν $\overline{x}(t)$ ειναι *καποια* λυση της μη ομογενους ΔΕ

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \tag{15.27}$$

και $x_1(t), ..., x_N(t)$ ειναι οι N θεμελιωδεις λυσεις της *προσαρτημενης* ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0, \tag{15.28}$$

τοτε η *γενικη* λυση της (15.16) ειναι

$$x(t) = c_1 x_1(t) + ... + c_N x_N(t) + \overline{x}(t)$$

οπου $c_1, ..., c_N$ ειναι αυθαιρετες σταθερες.

15.4.3. Αποδειξε οτι: η ομογενης γραμμικη ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

εχει ακριβως N γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις.

15.4.4. Αποδειξε οτι: αν $\mathcal{X}$ ειναι το συνολο των λυσεων της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

τοτε ισχυει το εξης

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} : c_1 x_1 + c_2 x_2 \in \mathcal{X}.$$

15.4.5. Αποδειξε οτι: οι θεμελιωδεις λυσεις $x_1, ..., x_N$ της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0.$$

ειναι μια *βαση* του $\mathcal{X}$, δηλ.

$$x \in \mathcal{X} \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n.$$

Μαθηματικο Λογισμικο

Το μαθηματικο λογισμικο διαιρειται σε δυο βασικες κατηγοριες. Λογισμικο προσανατολισμενο σε *αριθμητικους υπολογισμους*, το οποιο ειναι χρησιμο, π.χ., για αριθμητικη επιλυση αλγεβρικων και διαφορικων εξισωσεων, γραφικες παραστασεις κ.τ.λ. Και λογισμικο προσανατολισμενο σε *συμβολικους υπολογισμους*, το οποιο μπορει να υπολογισει συμβολικα παραγωγους (π.χ. την $\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin x\right) = x^2 \cos x + 2x \sin x$), ολοκληρωματα (π.χ. το $\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right)$), να επιλυσει διαφορικες εξισωσεις (π.χ. η $\frac{dx}{dt} = x^2$ εχει λυσεις $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = \frac{1}{c-t}$), να κανει γραφικες παραστασεις και πολλα αλλα.

Επισης το μαθηματικο λογισμικο μπορει να διαιρεθει σε αυτο το οποιο παρεχεται δωρεαν και σε αυτο το οποιο πωλειται.

1. **Δωρεαν**.
   - (α') *Octave*. Κυριως για αριθμητικους υπολογισμους. Κλωνος του *Matlab*.
   - (β') *Maxima*. Κυριως για συμβολικους υπολογισμους.
   - (γ') *Lyx*. Επεξεργαστης κειμενου για μαθηματικα κειμενα, με δυνατοτητα συμβολικων υπολογισμων.
2. **Εμπορικα**.
   - (α') *Matlab*. Κυριως για αριθμητικους υπολογισμους. Εχει ομως ενσωματωμενο το *Mupad*, ενα λογισμικο για συμβολικους υπολογισμους.
   - (β') *Maple*. Κυριως για συμβολικους υπολογισμους.
   - (γ') *Mathematica*. Κυριως για συμβολικους υπολογισμους.
   - (δ') *Scientific Workplace*. Επεξεργαστης κειμενου για μαθηματικα κειμενα, με δυνατοτητα συμβολικων υπολογισμων.

Για περισσοτερες πληροφοριες και για να αποκτησεις τα παραπανω λογισμικα, θυμησου: *το Google ειναι φιλος σου*!

Βιβλιογραφια

Η μαθηματικη δυσκολια των παρακατω ειναι αναλογη του αριθμου των αστερισκων.

1. *** Apostol, Tom M. Calculus, Vols. 1 and 2. John Wiley & Sons, 2007.
2. **** Apostol, Tom M. Mathematical analysis. (1974).
3. ** Ayres, Frank, and Elliot Mendelson. Schaum's outline of theory and problems of differential and integral calculus. McGraw-Hill, 1990.
4. ** Berman, Georgii Nikolaevich. A collection of problems on a course of mathematical analysis. Elsevier, 2014.
5. **** Kaplan, Wilfred. Advanced calculus. Addison Wesley Publishing Company, 1973.
6. ** Minorsky, V.P. Problems in higher mathematics. Mir Publishers, 1975.
7. ** Paul's Online Math Notes. *http : //tutorial.math.lamar.edu/*.
8. **** Rudin, Walter. Principles of mathematical analysis. New York: McGraw-Hill, 1964.
9. * Stewart, James. Calculus: early transcendentals. Cengage Learning, 2010.
10. * Thomas, George Brinton, et al. Thomas' Calculus Early Transcendentals. Pearson, 2010.
11. ** Wrede, Robert C., and Murray R. Spiegel. Advanced calculus. McGraw-Hill, 2010.

Επιλογος: Τα μαθηματικα ειναι ενα σκοτεινο σπιτι

"... Perhaps I could best describe my experience of doing mathematics in terms of entering a dark mansion. You go into the first room and it's dark, completely dark. You stumble around, bumping into the furniture. Gradually, you learn where each piece of furniture is. And finally, after six months or so, you find the light switch and turn it on. Suddenly, it's all illuminated and you can see exactly where you were. Then you enter the next dark room. . . "

Andrew Wiles